Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Complexa II

Frequência — 21/6/99

Duração: 3h

(8.0) 1. Representação de Funções.

(a) Classifique quanto às singularidades a função $\dfrac{e^z-1}{z}$.

(b) Justifique que pode representar em série de potências numa vizinhança da origem a função $\dfrac{z}{e^z-1}$. Determine o raio de convergência da representação em série de potência dessa função, i.e.

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n .$$

(c) Tendo em atenção que

$$\frac{z}{e^z-1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1} \quad \text{e} \quad \frac{e^{-z}+1}{e^{-z}-1} = -\frac{e^z+1}{e^z-1} ,$$

conclua que

$$b_1 = -\frac{1}{2} , \quad b_{2n+1} = 0 , \; n = 1, 2, \ldots$$

e também

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}} .$$

(d) Mostre que

$$z \operatorname{cotan} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (-1)^n 2^{2n} z^{2n} ,$$

e calcule b_2, b_4 e b_6. Indique a região de convergência da representação em série anterior.

(e) Sabendo que

$$\tan z = \operatorname{cotan} z - 2 \operatorname{cotan} 2z ,$$

obtenha o desenvolvimento em série de potências numa vizinhança da origem para a função tangente.

---

v.s.f.f.

(f) Enuncie o teorema de Mittag-Leffler e aplique-o para obter a representação

$$\operatorname{cosec}^2 z = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n\pi)^2}\,.$$

Indique a região de convergência uniforme.

(g) Conclua que a representação de Mittag-Leffler para a função $z \operatorname{cotan} z$ vem dada por $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2\pi^2}$.

(h) Utilize as alíneas anteriores para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}\,.$$

(4.0) 2. Aplicações do Teorema de Rouché.

(a) Mostre que as raízes de $z^4 - z + 5$ estão na coroa circular $\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < \sqrt{3}\}$. Verifique também que as raízes não se encontram nos eixos real e imaginário.

(b) Deduza a fórmula de Lagrange:

$$\frac{\pi(\xi)}{F'(\xi)} = \pi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} D_a^n(\pi(a) f^n(a))$$

onde as funções $F(z) = z - a - uf(z)$ e π são analíticas numa vizinhança de $a \in \mathbb{C}$.

(c) Aplique a fórmula de Lagrange para calcular a função geradora dos polinómios de Hermite, $H_n(z) = D^n(e^{-z^2})$, $n = 0, 1, \ldots$.

(5.0) 3. Teoremas de Unicidade.

(a) Sejam f e g duas funções analíticas no domínio $D \subset \mathbb{C}$ e que não se anulam aí. Mostre que, se o derivado de

$$\left\{ z \in D \colon \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} \right\}$$

for um subconjunto não vazio de D então existe uma constante, α, não nula tal que $f(z) = \alpha g(z)$, $z \in D$.

---

v.s.f.f.

(b) Enuncie o Lema de Schwarz e aplique-o para mostrar que os automorfismos do disco unidade são as aplicações do tipo $e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ com $|a|<1$ e $\theta \in [0\,,\,2\pi[$.

(c) Se uma sucessão de funções analíticas definidas num mesmo domínio $D \subset \mathbb{C}$ é uniformemente limitada em D e converge num conjunto que tem ponto de acumulação em D, então converge uniformemente em D.

(3.0) 4. Funções Elípticas.

(a) Defina função elíptica.

(b) Justifique que o conjunto dos períodos de uma função meromorfa e não constante não tem ponto de acumulação.

(c) Se f é uma função elíptica ímpar e w um seu período, então $w/2$ é um zero ou um pólo de f de ordem ímpar.

(d) Estabeleça um resultado análogo para funções elípticas pares.