Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Complexa II

Folha de Exercícios

1. Identifique analítica e geometricamente os seguintes pontos:

(a) $\sqrt{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}}$ **(e)** $(-4)^{3/4}$

(b) $\sqrt{1+i}$ **(f)** $(-i)^{-1}$

(c) $\sqrt[4]{i}$ **(g)** $\log(-i)$

(d) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{11}$ **(h)** $\log(1+i)^{i\pi}$

2. Mostre que $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1$ se $|z|=1$ e $1-\bar{a}z \neq 0$.
3. Mostre que a equação

$$|z|^2 - 2\Re e(\bar{a}z) + |a|^2 = \rho^2$$

representa uma circunferência centrada em a e de raio r.

4. Mostre que $\left|\dfrac{z^m}{z^n+1}\right| \geq \dfrac{R^m}{R^n+1}$ para $|z|=R$, $R>1$.
5. Mostre que a distância esférica de z_1 a z_2 é dada por

$$d(z_1,z_2) = \frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}.$$

6. Descreva a superficie de Riemann para $w = z^{1/3}$.
7. **(a)** Seja F uma função complexa, definida em $D\times D$ onde D é um domínio de $\mathbb{C}$. Se F é analítica em D como função de cada uma das variáveis e $F(z,w)\equiv 0$ para $(z,w)\in E\times E$, onde $E\subset D$ com derivado $E'\neq\emptyset$, então $F(z,w)\equiv 0$ para $(z,w)\in D\times D$.

   (b) Mostre que $|\cos z|^2 = \cosh^2 y - \sin^2 x$, $z = x+iy$.

   (c) Indique os zeros de $\cos z$ e os seus períodos.

   (d) Mostre que $\cos^{-1}(z) = -i\log(z+\sqrt{z^2-1})$.

   (e) Determine uma fórmula semelhante para a função **sin**, e a partir dela os seus zeros e períodos.
8. Determine a imagem pela aplicação $w = z^a$ do sector $\{z\in\mathbb{C}: 0 < \arg z < \theta_0\}$. Represente-a.
9. Que condições temos de impôr sobre a,b por forma a garantir que a função $z^a(1-z)^b$ está univocamente determinada. Nesse caso descreva a superficie de Riemann de $z^a(1-z)^b$.
10. Para que valores dos parâmetros a,b,c é a função $az^2+bz\bar{z}+c\bar{z}^2$ analítica.

11. **(a)** Mostre que se f é analítica num domínio D de $\mathbb{C}$, então $\overline{f(\bar{z})}$ é analítica em $D^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \mathbb{C}\}$.

    (b) Mostre que, se f é analítica num domínio de $\mathbb{C}$ e $\Im m f \equiv 0$ em D, então f é constante sobre D.

    (c) Mostre que, se f é analítica num domínio de $\mathbb{C}$ e $|f|$ é aí constante, então f é também constante.

    (d) Enuncie o teorema do prolongamento analítico por simetria.

12. Sejam P, Q duas funções complexas, contínuas sobre um arco suave Γ. Seja dado um domínio D de $\mathbb{C}$ tal que $\Gamma \cap D = \emptyset$. Mostre que,
$$F(w) = \int_\Gamma \frac{P(z)\,dx}{z-w} + \int_\Gamma \frac{Q(z)\,dx}{z-w}\,, \quad z = x + iy$$
é analítica sobre D. Calcule a função derivada de F.

13. Um domínio em $\mathbb{C}$ é convexo se e somente se for estrelado relativamente a cada ponto do domínio.

14. Seja u a função complexa definida sobre $\mathbb{C}$ por $u(z) = \Im m 1/z^2$ se $z \neq 0$ e $u(0) = 0$. Mostre que:

    (a) existem todas as derivadas parciais de u relativamente a x, y.

    (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

    (c) u não é uma função harmónica em $\mathbb{C}$.

    (d) Mostre que toda a função harmónica é C^∞.

15. **(a)** Mostre que $\log|z|$ é harmónica em $0 < |z| < \infty$.

    (b) Determine a sua harmónica conjugada em $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$.

    (c) Mostre que $\log|z|$ não tem harmónica conjugada em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

16. **(a)** Seja f um ramo analítico de z^a, definido em $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$. Mostre que, $f'(z) = af(z)/z$.

    (b) Mostre que, qualquer ramo analítico da função $\log z$ definido em $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$ tem a mesma função derivada.

17. Represente a família de curvas de nivel de u, v para:

    (a) $f(z) = u(z) + iv(z) = z^3$ **(b)** $f(z) = u(z) + iv(z) = 1/z$

18. Transformações Homográficas: Considere a função
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad ad - bc \neq 0\,, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}\,,$$
com $f(-d/c) = \infty$ e $f(\infty) = a/c$. **Verifique:**

    (a) A função f é uma aplicação bijectiva de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

    (b) A composição de funções homográficas é homográfica.

    (c) Dados três pontos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ e três pontos $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$, existe uma única transformação homográfica f, que verifica $f(z_j) = w_j$ para $j = 1, 2, 3$. Determine-a.

(d) Toda a transformação homográfica é a composição de uma translacção, dilatação e inversão.

(e) A imagem de circunferências e rectas por uma transformação homográfica é ainda uma circunferência ou uma recta.

(f) Determine os possíveis pontos fixos de uma transformação homográfica.

19. Calcule explicitamente as transformações homográficas que levam:

(a) $1 \mapsto 1$, $-1 \mapsto -1$ e $i \mapsto 0$

(b) $0 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto 0$ e $1 \mapsto -1$

(c) $1+i \mapsto 0$, $2 \mapsto \infty$ e $0 \mapsto i-1$

(d) $i \mapsto 0$, $0 \mapsto -1$ e $\infty \mapsto 1$

20. Para a transformação homográfica definida no exercício **18 (c)** determine, sem fazer uso da sua expressão analítica, as imagens por ela dos seguintes conjuntos:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \Im m z = 0\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} : \Re e z = 0\}$

21. Para a transformação homográfica definida no exercício **18 (d)** determine, sem fazer uso da sua expressão analítica, as imagens por ela de qualquer recta vertical ou horizontal, assim como dos semi-planos $\{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z > 0\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$.

22. Toda a transformação homográfica f com um ponto fixo é conjugada da translacção $z \mapsto z+1$, i.e. existe uma transformação homográfica, h, tal que $h(f(h^{-1}(z))) = z+1$.

23. Toda a transformação homográfica f com dois pontos fixos é conjugada duma dilatação $z \mapsto az$ para $a \neq 0, 1$.

24. Aplicando o teorema de Green calcule $\int_{\partial D} x\, dy$, onde D é um semi-círculo centrado em 0 e raio R.

25. Determine, usando integração ao longo de um caminho, a conjugada harmónica de $u(x, y) = 3x^2y - y^3$.

26. Calcule os seguintes integrais ao longo de um caminho:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^m}$, $m \in \mathbb{N}$

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z^m}$, $m \in \mathbb{N}$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|^m}$, $m \in \mathbb{N}$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z|^m}$, $m \in \mathbb{N}$

27. Mostre que,

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{z^n}{z^m - 1}\, dz \right| \leq \frac{2\pi R^{n+1}}{R^m - 1}, \quad R > 1, \quad m \geq 1.$$

28. Sejam, γ_1, γ_2 dois caminhos unindo $-i\pi$ a $i\pi$, contidos nos semi-planos $\{z \in \mathbb{C} : \Re e z \geq 0\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : \Re e z \leq 0\}$, respectivamente. Calcule $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\, dz$ e $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\, dz$ para as seguintes funções:

(a) $f(z) = e^z$

(b) $f(z) = \cos z$

(c) $f(z) = 1/z$

29. Seja $D = \mathbb{C}\backslash]-\infty, 1]$, e considere o ramo de $\sqrt{z^2-1}$, definido em D e que é positivo em $]1, \infty[$.
(a) Mostre que $\{z + \sqrt{z^2-1} : z \in D\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z = 0\,,\, \Re e\, z < 0\} = \emptyset$.
(b) Mostre que $\log(z + \sqrt{z^2-1})$ é uma primitiva de $1/\sqrt{z^2-1}$ em D.
(c) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$, onde γ é um caminho que une $-i$ a i em $D \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z > 0\}$.
30. (a) Mostre que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{-isx}\, dx = e^{-s^2/2}$, $-\infty < s < \infty$.
Ideia: Integre $\exp(-z^2/2)$ ao longo de um rectângulo devidamente escolhido, aplique o teorema de Cauchy, e tome o lado do rectângulo tão grande quanto queira.
(b) Se h é uma função contínua em $[-M, M]$, então, é inteira a sua transformada de Fourier dada por

$$H(z) = \int_{-M}^{M} h(t) e^{-itz}\, dt\,.$$

31. Demonstre o teorema fundamental da álgebra. Como aplicação, mostre que se f for uma função inteira, tal que $f(z)/z^n$ é limitada, então f é um polinómio de grau quando muito n.
32. Seja f é uma função contínua em $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ e analítica em $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Mostre que $\displaystyle\int_{|z|=R} f(z)\, dz = 0$.
33. Seja f uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mostre que, existe uma constante c tal que $f - c/z$ tem uma primitiva em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dê uma fórmula para c em termos de um integral de f.
34. Calcule os seguintes integrais:
(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1}\, dz$, $n \geq 0$
(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^m}$, $-\infty < m < \infty$
(c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z}\, dz$
(d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2(z^2-4)e^z}$
35. Determinar o raio de convergência dos seguintes desenvolvimentos em série:
(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$
(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$
(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^n}{4^n + 5^n}$
(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2n}}{n(n+1)}$
(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n n^a}$ (com a parâmetro real)
(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n}$
36. Determine o raio de convergência para os desenvolvimentos em série das seguintes funções, centrados nos pontos indicados:

(a) $\dfrac{1}{z-1}\quad (z=i)$

(b) $\dfrac{1}{\cos z}\quad (z=0)$

(c) $\dfrac{1}{\cosh z}\quad (z=0)$

(d) $\dfrac{z}{\sin z}\quad (z=-i\pi)$

(e) $z^{3/2}\quad (z=3)$

(f) $\dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2/4}\quad (z=0)$

37. Classifique as singularidades isoladas das seguintes funções em $\mathbb{C}^*$. Indique também a ordem dos seus polos e a parte principal do seu desenvolvimento em série de potências na vizinhança do polo.

(a) $\dfrac{z}{(z^2-1)^2}$

(b) $\tan z$

(c) $\dfrac{\cos z}{(z^2-\pi^2/4)}$

(d) $\log\left(1-\dfrac{1}{z}\right)$

38. Considere o desenvolvimento em série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ de $\sec z$ que é convergente em $\{z\in\mathbb{C} : |z|=3\}$.

(a) Indique uma coroa circula onde a série converge.

(b) Calcule os coeficientes $a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0$.

39. Se f, g são duas funções meromorfas no domínio D, e $z_0\in D$, então:

(a) $\mathrm{ordem}(fg, z_0) = \mathrm{ordem}(f, z_0) + \mathrm{ordem}(g, z_0)$;

(b) $\mathrm{ordem}(f+g, z_0) \geq \min\{\mathrm{ordem}(f, z_0)\,,\, \mathrm{ordem}(g, z_0)\}$;

(c) Temos igualdade na alínea anterior quando $\mathrm{ordem}(f, z_0)\neq \mathrm{ordem}(g, z_0)$.

40. Considere o ramo de $\sqrt{z^2-1/z}$ que é positivo em $\{z\in\mathbb{C} : \Im m\, z=0\,,\ \Re e\, z>R>0\}$. Mostre que f é meromorfa numa vizinhança de ∞. Determine a parte principal do seu desenvolvimento em série e o seu resíduo no infinito.

41. Calcule o resíduo em cada singularidade isolada no plano complexo, das seguintes funções:

(a) $e^{1/z}$

(b) $\tan z$

(c) $\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$

(d) $\dfrac{1}{z^2+z}$

42. Aplicando o teorema dos resíduos calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)\,dx}{1+x^4},\ a>0$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{a+\cos\theta}\,d\theta,\ a>1$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^a\,dx}{1+x},\ 0<a<1$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\log x\,dx}{(x+a)(x+b)},\ a,b>0$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)\,dx}{x(1+x^2)}$

(h) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\log x\,dx}{(1+x)^2}$

43. Seja g uma função contínua no círculo unitário. Mostre que g pode ser aproximada uniformemente no círculo unitário por polinómios se, e somente se, g se poder

estender de forma contínua à respectiva circunferência e for analítica no interior do círculo.

44. Seja f analítica em $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$, verificando $|f| \leq M$, $f(0) = 0$. Mostre que, $|f'(0)| \leq M/\rho$. Determine todas as funções analíticas para as quais se tenha a igualdade.
45. Mostre que $d(z, w) = \left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|$, $|z| < 1$, $|w| < 1$, define uma métrica no disco unitário. Mostre que para esta métrica se tem $d(f(z), f(w)) \leq d(z, w)$, para toda a função analítica, limitada por 1, no disco unitário.
46. Mostre que métrica de Poincaré $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ é invariante sobre os automorfismos analíticos do disco unidade.
47. Mostre que:

    (a) $2z^5 + 6z - 1$ tem quatro raizes na coroa circular $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. Onde é que se encontra a quinta?

    (b) $z^4 + 2z^2 - z + 1$ tem uma raíz por quadrante.

    (c) Seja D um domínio limitado com fronteira suave. Se as funções f, g, analíticas em D, verificam $|f + g| < |f| + |g|$ sobre ∂D, então f, g têm o mesmo número de zeros em D.

    (d) Sejam f, g duas funções analíticas em $\overline{D}$, com $f \not\equiv 0$ sobre ∂D e zeros de f, $z_j \in D\,, \quad j \in \mathbb{N}$, repetidos de acordo com a sua multiplicidade. Então,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum g(z_j)\,.$$

48. Seja f uma função analítica em $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Defina-se a sucessão de funções $f_n(z) = f(z/n)$ para $z \in D$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\{f_n\}$ é uma família normal em D se, e somente se, a singularidade de f em 0 for regular ou um polo.
49. Seja f uma função analítica em $\{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z > 0\}$ e tal que $\Re e\, f > 0$. Considere que a sucessão das iterações de f, $\{f_n\}$ definida por

$$f_2(z) = f(f(z))\,,\ \ldots\,,\ f_n = f(f_{n-1}(z))\,,\ \ldots$$

    é normal. Se $\{f_n\}$ tiver uma função de acumulação não constante, então f é uma função homográfica.
50. Seja G a transformação de Riemann de um conjunto simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$ sobre o disco unidade, verificando $G(z_0) = 0$ e $G'(z_0) = A > 0$. Mostre que, se f é uma função analítica sobre D verificando $|f| < 1$ então $|f'| \leq A$; temos igualdade somente quando f é um múltiplo unimodular de G.
51. Os automorfismos do disco unidade, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, são as funções da forma $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ com $|a| < 1$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

52. Toda a transformação conforme do semi-plano superior no disco unitário toma a forma $w = e^{i\theta_0} \dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$.
53. Determine a transformação, sobrejectiva e conforme, w, de $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ no disco unitário, tal que $w(1) = 0$, $w(-1+i0) = i$, $w(-1-i0) = -i$. Represente a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\,, \quad -\pi < \arg z < \pi\}$ por esta transformação.
54. Mostre que $w(z) = 1/2(z + 1/z)$ transforma conformemente e sobrejectivamente o interior do disco unitário num domínio D da esfera de Riemann $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Identifique D. Represente as imagens por esta aplicação da circunferência de centro 0 e raio r. Identifique a transformação inversa (indicando o ramo que está a considerar).
55. Suponha que são dados quatro parâmetros reais a, b, c, d tais que $0 < a < b$ e $0 < c < d$. Mostre que existe uma transformação conforme e sobrejectiva da coroa circular $\{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}$ sobre $\{z \in \mathbb{C} : c < |z| < d\}$ se, e somente se, $a/b = c/d$. Descreva as transformações conformes e sobrejectivas duma coroa circular sobre si mesma.
56. Seja g a transformação conforme e sobrejectiva, g, do quadrado $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re e\, z < 1\,, \quad 0 < \Im m\, z < 1\}$ sobre o disco unitário, verificando $g(0) = 1$, $g(1) = i$, $g(1+i) = -1$ e $g(i) = -i$. Mostre que g admite uma extensão meromorfa a todo o plano complexo que é duplamente periódica, com períodos 2 e $2i$. Localize os zeros, polos e os pontos de ramificação de g.