Tema 1: Função Γ

Considere a seguinte função real definida e $]0,\infty[$ por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt\,. \tag{1}$$

Mostre que:

1. O integral impróprio definido em (1) é convergente se $x \in \mathbb{R}$ é tal que $x_0 \le x \le x_1$ para quaisquer $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^+$.

2. Se tem a seguinte igualdade, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Donde se vê que a função Γ definida em (1) representa a interpolação de factoriais.

3. A função Γ é convexa e que a sua derivada anula-se entre 1 e 2.

4. A função $\log \Gamma(x) = \gamma(x)$ é também convexa e verifica as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \gamma(x+1) - \gamma(x) &= \log(x) \\ \gamma'(x+1) - \gamma'(x) &= \frac{1}{x} \\ \gamma''(x+1) - \gamma''(x) &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned} \tag{2}$$

5. A função $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ verifica a equação (2).

6. A solução geral de (2) é da forma $g(x) + h(x)$ onde h é periódica de período fundamental 1, contínua e não negativa. Além disso, $\displaystyle\int_0^1 h(x)\, dx = 0$.

7. A função γ admite a seguinte representação:

$$\gamma(x) = -cx - \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log(1 + x/n) - \frac{x}{n} \right)\,,$$

onde $c = -\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\log(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$; e portanto

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}\,.$$

8. $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$ e que Γ é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$, com polos simples em $0, -1, -2, \dots$.

9. $\Gamma(x)\Gamma(1-x)\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Tema 2: Polinómios Ortogonais sobre a circunferência Unidade

Seja $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios mónicos, ortogonal relativamente à medida de Borel μ, i.e.

$$\int_{\operatorname{supp}\mu} \phi_n(z)\phi_m(z)\, d\mu(z) = h_n\delta_{n,m}\,, \quad n, m \in \mathbb{N}\,.$$

1. Mostre que o conjunto das raízes de $\{\phi_n\}$ está contido no invólucro convexo do suporte da medida.

2. Se $\operatorname{supp}\mu = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e sendo (a_n) a sucessão dos parâmetros de reflexão, então:

(a) $|a_n| < 1 \Longrightarrow \phi_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_j)$ com $|z_j| < 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

(b) $0 < |a_n| < 1 \Longrightarrow \phi_n$ e ϕ_{n+1} não têm raizes em comum.

(c) $|a_n| = 1 \Longrightarrow$ as raizes de ϕ_{n+1} são simples e encoontram-se sobre o $\operatorname{supp}\mu$.

Indicação: ϕ_n e ϕ_n^* verificam relações de recorrência.

3. Demonstre o Teorema de Dini.

4. Demonstre o teorema de Szegő enunciado por Geronimus.

5. Nas condições do teorema anterior mostre que $\{e^{in\theta}\}$ não é denso em $\mathrm{L}^2_\mu([0, 2\pi[)$. Será que se tem o recíproco.

Tema 3: Funções Racionais

1. Para que uma série de potências de x represente uma função racional é necessário e suficiente que os seus coeficientes verifquem uma relação de recorrência linear de coeficientes constantes.

Ideia: $\dfrac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3} = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots$.

2. Mostre também que a representação em série de Laurent numa coroa circular corresponde a uma funçõa racional se e somente se os coeficientes da representação em série verificarem uma relação de recorrência linear de coeficientes constantes.

Ideia: $\dfrac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3} = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_n x^n$.

3. Em qualquer dos casos determine a região de convergência.

4. **Teorema de Liouville:** Uma função do tipo $r_1(x)\exp(r_2(x))$ onde r_1, r_2 representam funções racionais, é elementarmente primitivável então a sua primitiva é da forma $r(x)\exp(r_2(x))$, onde r é uma função racional.

Use este resultado e os exercícios anteriores para concluir que e^{-x^2} e e^x/x não são elementarmente primitiváveis.

5. Dizemos que uma função racional tem os seus termos entrelaçados sobre o eixo real se os seus zeros e polos são simples e dispostos de forma que entre dois zeros consecutivos existe um único polo.

(a) Mostre que sendo f a função limite uniforme da sucessão $\{R_n\}$ constituida por funções racionais com termos entrelaçados, então os seus zeros e polos são simples, reais e entrelaçados.

(b) Uma condição necessária e suficiente para que uma função meromorfa seja limite uniforme de frações racionais com termos entrelaçados é que tenha a seguinte representação

$$f(z) = A - Bz + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{z - \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \right)$$

onde $A, A_n, B, \alpha_n \in \mathbb{R}$, B, A_n têm o mesmo sinal e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2}$ é convergente.

Tema 4: Funções Univalentes e Transformações Conformes

1. **Transformações Homográficas** Considere a função
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad ad - bc \neq 0\,, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}\,,$$
com $f(-d/c) = \infty$ e $f(\infty) = a/c$. **Verifique:**
   - **(a)** A função f é uma aplicação bijectiva de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
   - **(b)** A composição de funções homográficas é homográfica.
   - **(c)** Dados três pontos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ e três pontos $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$, existe uma única transformação homográfica f, que verifica $f(z_j) = w_j$ para $j = 1, 2, 3$. Determine-a.
   - **(d)** Toda a transformação homográfica é a composição de uma translacção, dilatação e inversão.
   - **(e)** A imagem de circunferências e rectas por uma transformação homográfica é ainda uma circunferência ou uma recta.
   - **(f)** Determine os possíveis pontos fixos de uma transformação homográfica.
2. Determine a transformação homográfica, f, que satisfaça $f(i) = 0$, $f(0) = -1$ e $f(\infty) = 1$.
3. Qual é a imagem pela aplicação determinada na alínea anterior das seguintes regiões do plano: $\{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z > 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$ e $\{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z = 1\}$. Represente a imagem de qualquer recta horizontal ou vertical por essa aplicação.
4. Os automorfismos do disco unidade, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, são as funções da forma $f(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$ com $|a| < 1$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.
5. Demonstre os teoremas de Hurwitz e Montel.
6. Seja f uma função analítica em $\{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z > 0\}$ e tal que $\Re e\, f > 0$. Considere que a sucessão das iterações de f, $\{f_n\}$ definida por
$$f_2(z) = f(f(z))\,, \ \ldots\,, \ f_n = f(f_{n-1}(z))\,, \ \ldots$$
é normal. Se $\{f_n\}$ tiver uma função de acumulação não constante, então f é uma função homográfica.
7. As funções que pertencem a uma família normal de funções analíticas definidas num domínio D e tais que a constante ∞ não é uma função de acumulação, são uniformemente limitadas no interior de D.
8. Propriedades das funções univalentes.

Tema 5: Funções Geradoras e Polinómios de Faber

1. Sabendo que os polinómios de Jacobi estão definidos pela fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}}{n!2^n(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, determine:

(a) a sua função geradora.

(b) $\xi(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}\right|$.

2. Seja D um domínio limitado de $\mathbb{C}$.

(a) Mostre que existe uma única transformação conforme do exterior de D no exterior de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, ϕ tal que $\phi(\infty) = \infty$ e $\lim_{z\to\infty} \frac{\phi(z)}{z} = 1$.

(b) A função ϕ é representável em série de Laurent por $\phi(z) = z + \alpha_0 + \frac{\alpha_{-1}}{z} + \ldots$ e $(\phi(z))^n = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \cdots + \alpha_0^{(n)} + \frac{\alpha_{-1}^{(n)}}{z}$, $n \in \mathbb{N}$. Definimos o polinómio de Faber de ordem n associado a D por

$$p_n(x) = z^n + \alpha_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \cdots + \alpha_0^{(n)}\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,.$$

Identifique estes polinómios quando $D = B_{z_0}(r_0)$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| \leq 1\}$ e $D = [-1, 1]$.

(c) Determine a função geradora dos polinómios de Faber, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(z)}{w^{n+1}} = F(z, w)$.

Ideia: Mostre que $p_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{(\phi(w))^n}{w - z}\, dw$.

(d) Que pode dizer sobre $\lim_{n\to\infty} (|p_n(z)|)^{1/n}$ para z no exterior do domínio D.