Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

Teste — Dezembro 2001

(4.0) 1. Seja f a função real de variável real de expressão analítica $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

(a) Defina a função arcsin.

(b) Represente graficamente a função de expressão analítica $h(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, indicando o seu domínio máximo de definição e os seus intervalos de monotonia.

(c) Defina a partir da análise realizada nas alíneas anteriores, a função f e a função derivada de f.

(d) Mostre que, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) + 2\arctan x = c$, $x \in I \subset \mathbb{R}$. Determine a constante c e o intervalo I onde se verifica esta igualdade.

(4.0) 2. Calcule as primitivas das seguintes funções:

(a) $\sin(\log x)$.

(b) $1/\sqrt{1-x^2}$, efectuando para tal a mudança de variável $x = \cos t$ com $t \in [\pi, 2\pi]$.

(4.0) 3. Comente as seguintes afirmações:

(a) Uma função real de variável real, contínua é diferenciável.

(b) Pode aplicar-se o teorema de L'Hôpital para calcular o $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$.

(c) O integral da soma de duas funções limitadas é igual à soma dos integrais de cada uma das funções.

(4.0) 4. Funções integráveis

(a) Seja f uma função real de variável real, x, definida num intervalo $[a, b]$. Quando é que pode dizer que f integrável em $[a, b]$.

(b) Mostre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

---

v.s.f.f.

(c) Calcule, utilizando a definição o integral $\int_0^2 2^x \, dx$.

(d) Justifique que pode aplicar o teorema fundamental do cálculo integral para calcular o integral da alínea anterior, e calcule-o.

(4.0) 5. Os ponteiros de um relógio medem 4 e 6 cm. Unindo os seus extremos formamos um triângulo.

(a) Determine em função do tempo a área do triângulo.

(b) Determine o instante entre as 12h e as 12h30m para a qual é máxima a área do triângulo.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

Exame – 25/01/2002

Destinatários: Eng. Física, Geográfica, Geológica e Minas; Lic. de Física.
Duração: 2h30m

(5.0) 1. Diga, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Seja f uma função real de variável real. Se f não é diferenciável então f não é contínua.

(b) Pode aplicar-se o teorema de L'Hôpital para calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

(c) A expressão geral da função primitiva da função $f(x) = 1/x$ definida em $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é

$$F(x) = \log|x| + c\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

onde c é uma constante arbitrária.

(d) Seja f uma função real de variável real que verifica $f'(x) = f(x)/x$. Então a tangente a f em qualquer ponto do seu gráfico é uma recta horizontal.

(5.0) 2. Seja f uma função real de variável real de expressão analítica

$$f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}\,.$$

(a) Defina função arccos.

(b) Represente graficamente a função de expressão analítica $h(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, indicando o seu domínio máximo de definição e os seus intervalos de monotonia.

(c) Defina a partir da análise realizada nas alíneas anteriores, a função f e a sua função derivada.

(d) Mostre que, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) + 2\arctan x = c\,, \quad x \in I \subset \mathbb{R}\,.$$

Determine a constante c e o intervalo I onde se verifica a igualdade.

---

v.s.f.f.

(6.0) 3. Seja f a função real de variável real definida em $[1, +\infty[$ por

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t - 3}{1 - \cosh t}\, dt$$

(a) Mostre que a função real de variável real definida em $[1, +\infty[$ por

$$g(x) = \frac{e^x - 3}{1 - \cosh x}$$

é contínua. Conclua que f é diferenciável em $[1, +\infty[$.

(b) Determine os intervalos de monotonia de f.

(c) Calcule $\displaystyle\int \frac{e^t - 3}{1 - \cosh t}\, dt$.

(d) Estude a natureza do integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^t - 3}{1 - \cosh t}\, dt$.

(e) Tendo em atenção a informação contida nas alíneas anteriores, represente graficamente a função f.

(4.0) 4. Aplicações geométricas do integral.

(a) Calcule a área da região plana compreendida entre a curva de equação $y = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ e a sua assímptota.

(b) Calcule o volume do sólido obtido por rotação em torno de $x = 1$ da região limitada pelas curvas de equação

$$x = 1\,, \quad x = \sqrt{3}\,, \quad y = 0\,, \quad y = \sqrt{\frac{1}{1 + x^2}}\,.$$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

Exame – 15/02/2002

Destinatários: Eng. Física, Geográfica, Geológica e Minas; Lic. de Física.
Duração: 2h30m

(5.0) 1. Diga, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) A derivada da função arcsin é $-1/\sqrt{1-x^2}$.

(b) Pode aplicar-se o teorema de L'Hôpital para calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin(2x)}{(2x+\sin(2x))\exp(\sin x)}\,.$$

(c) Se f é uma função contínua, positiva e crescente em $[0,a]$ com $f(a)=b$ então

$$\int_0^b f^{-1}(x)\,dx = ab - \int_0^a f(t)\,dt\,.$$

(d) Seja f uma função diferenciável em $[0,2]$ tal que

$$3\int_0^x f(t)\,dt = xf(x)\,,$$

então $f(x)=cx^2$.

(5.0) 2. Seja f uma função real de variável real de expressão analítica

$$f(x) = \arctan\frac{x+c}{1-cx}\,,$$

onde $c\in\mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Defina função arctan.

(b) Represente graficamente a função de expressão analítica $h(x) = \dfrac{x+c}{1-cx}$, indicando o seu domínio máximo de definição e os seus intervalos de monotonia.

(c) Defina a partir da análise realizada nas alíneas anteriores, a função f e a sua função derivada.

(d) Mostre que,

$$f(x) - \arctan x = \arctan c\,, \quad x\in I\subset\mathbb{R}\,.$$

Determine um intervalo I onde se verifica a igualdade.

---

v.s.f.f.

(5.0) 3. Seja f a função real de variável real definida em $[1, +\infty[$ por

$$f(x) = \int_1^x \frac{t}{\exp t - 1}\, dt$$

(a) Mostre que a função real de variável real definida em $[1, +\infty[$ por

$$g(x) = \frac{x}{\exp x - 1}$$

é contínua. Conclua que f é diferenciável em $[1, +\infty[$.

(b) Faça um esboço do gráfico das funções reais de variável real de expressão analítica $1/(1-x)$ e $\exp x$, indicando um intervalo onde se dá a intersecção dos gráficos.

(c) Determine os intervalos de monotonia de f.

(d) Do estudo da concavidade de f indique natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{\exp t - 1}\, dt\,.$$

(e) Tendo em atenção a informação contida nas alíneas anteriores, faça um esboço do gráfico da função f.

(5.0) 4. Cálculo integral.

(a) Identifique a família de funções reais de variável real, diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}$ pela expressão analítica

$$\int \frac{1 + \sinh x}{1 + \cosh x}\, dx\,.$$

(b) Calcule a área da região plana compreendida entre a curva de equação $y = \dfrac{1-x}{(1+x)^2\sqrt{x}}$ e as suas assímptotas.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

Exame – 14/05/2002

Destinatários: Eng. Física, Geográfica, Geológica e Minas; Lic. de Física.
Duração: 2h30m

- Justifique convenientemente as suas respostas, apresentando os cálculos efectuados e enunciando os resultados utilizados.
- Não utilize máquina de calcular nem qualquer texto de consulta.
- Em caso de fraude a sua prova será imediatamente anulada.

(6.0) 1. Diga, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Seja f uma função real de variável real. Se f não é diferenciável então f não é contínua.

(b) A derivada da função arcsin é $-1/\sqrt{1-x^2}$.

(c) $xe^x > e^x - 1, \;\; x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(d) O integral da soma de duas funções limitadas é igual à soma dos integrais de cada uma das funções.

(7.5) 2. Cálculo integral.

(a) Identifique a família de funções reais de variável real, diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}$ pela expressão analítica:

$$\int x \ln^2 x \, dx \,.$$

(b) Calcule a área da região plana compreendida entre a curva de equação $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ e a sua assímptota.

(c) Indique, sem calcular o integral, os máximos e mínimos e os pontos de inflexão da função de expressão analítica

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2) \, dt \,.$$

---

v.s.f.f.

(6.5) 3. Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \; x \in]-\infty, 1] \backslash \{0\} \\ 1 & , \; x = 0 \\ x\sqrt[3]{1 - 3/x} & , \; x \in]1, +\infty[\, . \end{cases}$$

(a) Identifique o dominio de continuidade de f.

(b) Verifique que f é derivável em $\mathbb{R} \backslash \{1, 3\}$ e determine a expressão analítica da função derivada de f.

(c) Indique a equação da tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(3, 0)$.

(d) Estude a monotonia de f e identifique os seus extremos locais.