Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

1ª Frequência — 13/2/97

Destinatários: Lic. de Química, Bioquímica, Química Indústrial e Eng. Civil e Geográfica.
Duração: 2h30m

1. (a) Diga o que entende por primitiva de uma função real de variável real definida num intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

   (b) Enuncie o teorema fundamental do calculo integral.

   (c) Determine a função f derivável em $[0,2]$ que verifica

   $$3\int_0^x f(t)\,dt = xf(x) \quad \text{e} \quad f(1) = 2\,.$$

2. Calcule a família de primitivas das seguintes funções:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx;$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

3. Identifique e resolva a seguinte equação diferencial:

   $$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2(x-1)}\,.$$

4. (a) Determine a natureza do integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx$ onde k é uma constante real positiva.

   (b) Calcule a área da região

   $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le x^{-2/3}\}\,.$$

   (c) Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da figura descrita em (b):

      (i) em torno de OX;

      (ii) em torno de OY.

5. Calcule a área da intersecção da região limitada pelas curvas definidas em coordenadas polares por

   $$\rho = 1\,, \quad \rho = 2\cos(\theta)\,, \quad \rho = 2\sin(\theta).$$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

2ª Frequência — 18/6/97

Destinatários: Lic. de Química, Bioquímica, Química Indústrial e Eng. Civil e Geográfica.
Duração: 2h

1. Determine a natureza das seguintes séries numéricas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin(1/n!)$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+(-1)^{n+1}}{n^2+1}$

2. Seja f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}\,, & x < -1 \\ 0\,, & x = -1 \\ \log(x+1)\,, & x > -1 \end{cases}$$

   (a) Estude f quanto à continuidade no seu domínio de definição.

   (b) Identifique a função f'.

   (c) Estude f quanto à monotonia e extremos.

   (d) Use a informação contida nas alíneas anteriores para fazer um esboço do gráfico de f e f' numa vizinhança de $x = -1$.

3. (a) Considere a série de funções $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ definida em $[a,b]$. Diga em que condições podemos escrever $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$.

   (b) A partir do desenvolvimento em série de $(1-x^2)^{-1/2}$, válido em qualquer intervalo fechado contido em $]-1\,,\,1[$, determine a representação em série de Taylor de $\mathbf{arcsin}\,x$ indicando a região de convergência. Justifique todos os passos que efectuar.

   (c) Indique, sem calcular, o valor da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+1)(n!)^2 2^{4n+1}}$.

4. Estude quanto à convergência uniforme e absoluta a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}-x^n)$ para $x \in [-1\,,\,1]$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

Exame — 11/7/97

Destinatários: Lic. de Química, Bioquímica, Química Indústrial e Eng. Civil e Geográfica.
Duração: 2h30m

(4.5) 1. Seja f a função real definida em $[0\,,\,\infty[$ por

$$f(x) = e^x - 1 - \log(1+x)\,.$$

(a) Prove que $e^x > \dfrac{1}{1+x}$ para $x \in]0\,,\,\infty[$.

(b) Mostre que f é crescente em $]0\,,\,\infty[$.

(c) Sabendo que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots\,, \qquad x \in]0\,,\,1[$$

mostre que $\log(1+x) < x$ se $x \in]0\,,\,1[$.

(d) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n^2})$ é convergente.

(e) Sabendo que $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$, calcule $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\log(1-\frac{1}{n^2})$.

(2.5) 2. Calcule $\displaystyle\int \log(x^2+5x)\,dx$ e verifique o resultado obtido.

(5.0) 3. Seja A a região do plano definida por

$$A = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x + y^2 + 3 \le 0\,,\, y \ge x - 1 \Big\}\,.$$

(a) Determine a área de A.

(b) Estabeleça o integral, que lhe permite calcular o volume do sólido resultante da rotação de A em torno da recta $x = 1$.

(4.0) 4. Seja $I_k = \displaystyle\int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^k dx$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) Use uma mudança de variável conveniente para mostrar que

$$I_k = \int_0^{\infty} t^k e^{-t}\,dt\,.$$

(b) Mostre que $I_k = kI_{k-1}$ para $k \in \mathbb{N}$, e conclua que $I_k = (k!)$.

(c) Enuncie o critério do integral.

v.s.f.f.

(d) Estude a natureza da série $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{n^5}{e^n}$.

(4.0) 5. Considere a seguinte equação diferencial

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) = 0\,. \tag{1}$$

(a) Identifique a equação diferencial obtida fazendo em (2) $y' = z$.

(b) Resolva a equação diferencial (2) com condições iniciais $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

(c) Use a fórmula de Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)} g^{(k)}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

onde $f^{(k)}$ representa a derivada de ordem k de f, para verificar que a derivada de ordem n da equação (2) é

$$(1-x^2)y^{(n+2)}(x) - (2n+1)xy^{(n+1)}(x) - n^2 y^{(n)}(x) = 0\,, n \in \mathbb{N}\,.$$

(d) Determine $f^{(n)}(0)$ sendo f uma solução de (2) que verifica $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$.

(e) Represente em série de Taylor à volta de $x = 0$ a solução de (2) que verifica $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$.

(f) Determine a região de convergência da série representada na alínea anterior.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

Exame de Recurso — 3/9/97

Destinatários: Lic. de Química, Bioquímica, Química Indústrial e Eng. Civil e Geográfica.
Duração: 2h30m

(6.0) 1. Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

(a) Determine o domínio de definição de f.

(b) Classifique o tipo de descontinuidade de f em $x = -1$.

(c) Mostre que $f'(x) = -\dfrac{4x^2+2x}{(x^2+1)^2}$ no seu domínio.

(d) Verifique a existência de extremos locais de f.

(e) Determine, caso existam, as assímptotas de f.

(f) Utilizando apenas as alíneas anteriores esboce o gráfico de f.

(3.0) 2. O termo geral da sucessão associada à série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (S_n), é dado por

$$S_n = (1/3)^n + 2.$$

(a) Determine a natureza da série dada. Justifique convenientemente a resposta.

(b) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(c) Calcule $\sum_{n=3}^{21} a_n$.

(4.0) 3. Considere a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n-1)(n+1)}{n!}$.

(a) Determine a sua natureza.

(b) Calcule o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n!} x^n.$$

v.s.f.f.

(c) Mostre que $(x^2+x-1)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n!} x^n$.

(d) Indique, sem calcular, qual o valor de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n!}$.

(3.0) 4. Seja f uma função derivável em $[0,2]$ que verifica

$$2\int_0^x f(t)\,dt = xf(x) + x^3\cos(x)\,. \tag{2}$$

(a) Identifique a equação diferencial satisfeita por f.

(b) Determine a solução de (2) que verifica $f(\pi/2) = 0$.

(4.0) 5. Seja $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1\,,\ y \geq 0\,,\ y \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right\}$.

(a) Represente graficamente a região A.

(b) Determine o volume do sólido gerado por rotação em torno de OX da região A.
