Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

Primeira Frequência — 2/2/98

Destinatários: Lic. de Química, Bioquímica, Química Indústrial.
Duração: 2h30m

(6.0) 1. Seja f a função real de variável real definida por

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^4 - 1}\,.$$

(a) Determine o domínio de continuidade de f.

(b) Determine a região onde f é positiva.

(c) Diga, justificando, se o conhecimento do gráfico de f em $[0, \infty[$, lhe permite representar f em toda a recta real.

(d) Sabendo que f é decrescente nos intervalos de definição, represente graficamente f.

(e) Decomponha f em frações elementares.

(f) Calcule $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

(2.5) 2.

(a) Estabeleça a identidade

$$\log_a b \log_b c \log_c a = 1\,.$$

para quaisquer a, b, c reais positivos.

(b) Determine o dominio de $f(x) = \log_{x^2+1} x$.

(c) Calcule f'.

(6.0) 3.

(a) Prove usando uma mudança de variável adquada que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2})\,.$$

(b) Determine a função inversa da função sinh.

(c) Deduza, usando o teorema da derivada da função inversa, a derivada da função definida na alínea anterior.

v.s.f.f.

(d) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

(e) Calcule, recorrendo às somas de Riemann de um certo integral o seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n^2}\right).$$

(3.0) 4. Um rapaz está no topo de uma escada com cinco metros de comprimento, que está encostada a uma parede num beco com três metros de largura. A escada desliza, com o topo a deslizar ao longo da parede (e o rapaz segura-se a ela), e a base desliza no pavimento até bater na parede oposta. Sabendo que a velocidade atingida pela base quando bate na parede oposta é de 0.8 metros por segundo, determine a velocidade com que o rapaz está cair nesse instante.

(2.5) 5.

(a) Descreva analicamente em coordenadas polares a seguinte região do plano

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le x\right\}.$$

(b) Identifique a região do plano limitada pela curva de equação

$$\rho = 2\sqrt{\cos(2\theta)}\,.$$

(c) Calcule a área da região representada na alínea anterior.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

Exame de Recurso — 3/9/98

Destinatários: Lic. de Química, Bioquímica, Química Indústrial.
Duração: 3h

(4.0) 1. Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}\,, & x \in]\,0\,,\,\dfrac{2}{\pi}\,] \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

(a) Verifique se se pode aplicar o Teorema de Lagrange à função f no intervalo considerado.

(b) Mostre que existe $x_0 \in]\,0\,,\,\frac{2}{\pi}\,[$ tal que $f'(x_0) = 1$.

(c) Enuncie o Teorema de Rolle.

(d) Determine o número de zeros da função derivada de f em $]\,0\,,\,\frac{2}{\pi}\,[$.

(4.0) 2. Indique, justificando convenientemente a sua resposta, quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) Se $f' \equiv g'$, então $f \equiv g$.

(b) Se f' existe, então f'' também.

(c) Pela regra de L'Hôpital, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{1}$, que não existe.

(d) Para funções f e g duas vezes deriváveis, a segunda derivada de $f+g$ é dada por $f'' + g''$.

(6.0) 3.

(a) Recorrendo à definição de integral, calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{e^{1/n}}{n} + \frac{2e^{2/n}}{n} + \ldots + e\right].$$

(b) Determine a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{3^{2x} + 3^{6x}}{2\,3^{8x} + 3^{12x}}\, 5\, 3^{4x}\, dx\,.$$

---

v.s.f.f.

(c) Dê uma interpretação geometrica de

$$\int_0^a m(a-x)\,dx\,.$$

(d) Usando apenas resultados da geometria elementar, calcule o valor do integral apresentado na alínea anterior.

(2.0) 4. Verifique se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{1+n}\right)^n$$

é simplesmente convergente.

(4.0) 5. Considere a função $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$.

(a) Decomponha f em fracções elementares.

(b) Represente f em série de potências centrada em $x = 0$, utilizando somente o desenvolvimento de $\frac{1}{1-x}$ em série de potências.

(c) Determine a região de convergência da série obtida.

(d) Mostre que os coeficientes do desenvolvimento em série de potências de f verificam a seguinte relação

$$6a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 0\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,.$$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Matemática I

Exame — 23/11/98

Destinatários: Lic. de Química, Bioquímica, Química Indústrial.
Duração: 2h30m

(2.0) 1.

(a) Dê um exemplo de uma função contínua num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, que tenha um máximo em $a \in I$, mas cujas derivadas laterais em a existam e sejam diferentes.

(b) Dê um exemplo de uma função descontínua num ponto a do seu domínio, que tenha um máximo local em a e que seja estritamente decrescente à esquerda de a e estritamente crescente à direita de a.

OBSERVAÇÃO: Apresente também o esboço dos gráficos das funções pedidas.

(9.0) 2. Das afirmações seguintes, indique quais são verdadeiras e quais são falsas, justificando devidamente:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/7}} = 1 + \frac{2\pi}{7}$.

(b) Uma série numérica cujo termo geral tende para zero não é necessariamente convergente.

(c) Sejam $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Uma condição necessária e suficiente para a convergência da sucessão $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ é que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ seja limitada.

(d) $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \arctan^5(2x - \log|x-7| + \sinh 2x)$.

(e) Seja f uma função contínua, positiva e crescente em $[0,a]$ com $f(a) = b$. Então

$$\int_0^b f^{-1}(x)\, dx = ab - \int_0^a f(x)\, dx\,.$$

(f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[(1/n)^2 + (2/n)^2 + \ldots + (n/n)^2\right] = \frac{1}{3}$.

(g) Se a é uma constante real então $\displaystyle\int_0^{\infty} x e^{ax}\, dx$ converge sempre.

---

v.s.f.f.

(h) Se a é uma constante real então $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{an}\, dx$ converge sempre.

(i) Uma função contínua num intervalo fechado pode ser sempre obtida como limite uniforme de uma sucessão de polinómios.

(1.5) 3. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Se $\int_a^x f(t)\, dt = 0$ para todo o $x \in [a, b]$, então quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras:

(a) f é não é constante em $[a, b]$;

(b) $f > 0$ em $[a, b]$;

(c) f é nula em $[a, b]$;

(d) $f \leq 0$ em $[a, b]$.

(2.5) 4.

(a) Efectuando a mudança de variável $x = t + \pi/2$ e usando propriedades dos integrais, mostre que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx\,.$$

(b) Utilize o resultado da alínea anterior para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x + \sin^3 x}\, dx\,.$$

(5.0) 5.

(a) Defina função inversa da função tangente.

(b) Diga em que condições $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ onde $g \equiv f^{-1}$ e $f(x_0) = y_0$.

(c) Utilize o resultado da alínea anterior para determinar a derivada da função arctan definida na alínea (a).

(d) A partir do desenvolvimento em série de potências da função $\dfrac{1}{1-x}$, determine o desenvolvimento em série de potências e respectiva região de convergência da função arctan.

(e) Calcule o valor da soma infinita $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$
