Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

22/10/2003 Cálculo III – Teste (Parte I) **1h15m**

Eng. Electrotécnica e de Computadores

(3.0) **1.** Considere m funções reais, $f_1, \ldots, f_m$, definidas e de classe C^1 num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$, com $n \geq m$.

(a) Defina jacobiano da função $\boldsymbol{F}\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de expressão analítica $F(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x} \in D$.

(b) Enuncie uma condiçao necessária para a dependência funcional das m funções consideradas.

(c) Suponha que as m funções consideradas no enunciado, i.e. f_j com $j = 1, \ldots, m$ são funcionalmente independentes. Complete a frase:
— *Seja g uma função real definida e de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}^n$. *Existem parâmetros reais* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *tais que os pontos críticos,* $\boldsymbol{x}^0$, *da função*
$\phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de expressão analítica*

$$\phi(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \lambda_m f_m(\boldsymbol{x})$$

que verifiquem as condições $f_j(\boldsymbol{x}^0) = 0\,,\ \ j = 1, \ldots, m$, *são* ...

(7.0) **2.** Considere o sistema de equações

$$f_1(x, y, z) = 0\,, \quad f_2(x, y, z) = 0\,,$$

onde f_1 e f_2 são duas funções reais definidas em $\mathbb{R}^3$ por

$$f_1(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1\,, \quad f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1\,.$$

(a) Mostre que o sistema dado define, nas condições do teorema das funções implícitas, y e z como funções de x numa vizinhança do ponto de coordenadas $(-\sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2)$.

(b) Justifique que o sistema dado define duas curvas diferenciáveis em $\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[$, uma C_1 que passa pelo ponto $(-\sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2)$ e a outra C_2 que passa pelo ponto $(\sqrt{2}/2\,,\ -\sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2)$.

(c) Determine a equação cartesiana do plano normal à curva C_1 no ponto $(-\sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2)$.

(d) Mostre que

$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = \sqrt{-\sin(2t)/2}\,, \quad t \in [3/2\pi\,,\ 2\pi]\,,$$

define uma parametrização da curva C_2.

(e) Identifique o lagrangiano que lhe permite determinar os pontos de C_2 que estão mais próximos e mais afastados de $(0, 0, 0)$.

(f) Justifique que o problema enunciado em (e) é equivalente a determinar os extremos da função real de variável real de expressão analítica

$$f(t) = 1 - \sin(2t)/2\,, \quad t \in [3/2\pi\,,\ 2\pi]\,.$$

(g) Resolva o problema enunciado em (e).

(3.0) **3.** Considere o campo de vectores $F\colon\ D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de classe $\mathrm{C}^1(D)$.

(a) Dê uma condição necessária e suficiente para que F seja conservativo.

(b) Diga em que condições se tem

$$\int_\gamma F\,|\,\vec{t}\,\mathrm{d}\,s=\int_\Gamma \operatorname{rot}F\,|\,\vec{n}\ \mathrm{d}\,S\,.$$

(c) Defina curva integral associada ao campo de vectores F.

(6.0) **4.** Seja γ a curva de equação

$$x^2+y^2=3z^2\,,\quad x^2+y^2+(z-1)^2=1\,.$$

(a) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento de γ.

(b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma F\,|\,\vec{t}\,\mathrm{d}\,s$, onde F é o campo de vectores definido em $\mathbb{R}^3$ por $F(x,y,z)=(2xyze^{x^2}\,,\ ze^{x^2}+2ye^{y^2}\,,\ ye^{x^2})$.

(c) Descreva em coordenadas cilíndricas e esféricas a região

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\ x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\,,\ z>1/2\}\,.$$

(d) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o volume de T.

(e) Calcule o integral $\displaystyle\int_{S_1\cup S_2} G\,|\,\vec{n}\ \mathrm{d}\,S$, onde G é o campo de vectores definido por $G(x,y,z)=(xy^2\,,\,-y^3\,,\,z(5+2y^2))$, S_1 é a superfíce de equação

$$x=r\cos t\,,\ y=r\sin t\,,\ z=r/\sqrt{3}\,,\quad (t,r)\in\ [0,2\pi[\times[0,\sqrt{3}/2[\,,$$

e S_2 é o interior geométrico da curva γ.

(1.0) **5.** Considere a equação com derivadas parciais

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\,x^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\,y^2}=0\,.$$

Diga em que região é esta equação elíptica, e mostre que a mudança de variável

$$\xi(x,y)=y^2\,,\quad \eta(x,y)=x^2\,,$$

a reduz à sua forma canónica.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

27/01/2004 Cálculo III – Exame (Parte I) **1h10m**

Eng. Electrotécnica e de Computadores

(7.0) **1.** Considere as funções reais, f_1, f_2, f_3, definidas em $\mathbb{R}^3$, por

$$f_1(x,y,z) = e^{-x}\cos y\,, \quad f_2(x,y,z) = -e^{-x}\sin y\,, \quad f_3(x,y,z) = z^2\,.$$

(a) Calcule o jacobiano da função $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de expressão analítica

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))\,.$$

(b) Analise a dependência funcional das funções f_1, f_2, f_3.

(c) Defina a função $g \equiv \operatorname{div} F$, i.e. indique o seu domínio, contradomínio e expressão analítica.

(d) Determine a equação cartesiana do plano tangente à superfície de equação $g(x,y,z)=0$ no ponto $(-1,\pi/2,0)$.

(e) Mostre que a equação $g(x,y,z)=0$ define implicitamente, y como função de x,z numa vizinhança do ponto $(-1,\pi/2,0)$.

(f) Calcule o gradiente da função h definida na alínea anterior no ponto de coordenadas $(-1,0)$.

(3.0) **2.** Considere a curva, C, de equação

$$g_1(x,y,z)=0\,, \quad g_2(x,y,z)=0\,,$$

onde g_1 e g_2 são duas funções reais definidas em $\mathbb{R}^3$ por

$$g_1(x,y,z) = x^2+2y^2+2x+4y-9\,, \quad g_2(x,y,z) = y-z\,.$$

(a) Identifique o lagrangiano que lhe permite determinar os pontos de C que estão mais próximos de $(0,0,0)$.

(b) Mostre que

$$x = -1+2\sqrt{3}\cos t\,,\ y = -1+\sqrt{6}\sin t\,,\ z = -1+\sqrt{6}\sin t\,,\ t \in [0\,,\,2\pi[\,,$$

define uma parametrização da curva C.

(c) Justifique que o problema enunciado em (a) é equivalente a determinar os extremos da função real de variável real de expressão analítica

$$f(t) = 15 - 4(\sqrt{3}\cos t + \sqrt{6}\sin t)\,, \quad t \in [0\,,\,2\pi[\,.$$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

27/01/2004 Cálculo III – Exame (Parte II) **1h10m**

Eng. Electrotécnica e de Computadores

(5.0) **3.** Considere o campo de vectores $\boldsymbol{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de expressão analítica $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y, z, x)$.

(a) Verifique se o campo de vectores $\boldsymbol{F}$ é conservativo.

(b) Aplicando o teorema de Stokes, calcule o integral $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \,|\, \vec{t}\,\mathrm{d}\,s$, onde C é a curva de equação $x^2 + 2y^2 + 2x + 4y = 9\,, \quad y = z$.

(c) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento de C.

(d) Defina curva integral associada ao campo de vectores $\boldsymbol{F}$.

(4.0) **4.** Seja T a região de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 < 1\,, \quad x^2 + y^2 < z^2\,, \quad z < 0\}\,.$$

(a) Descreva em coordenadas esféricas a região T.

(b) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o volume de T.

(c) Mostre que $\displaystyle\int_{\partial T} (y, z, x) \,|\, \vec{n}\;\mathrm{d}\,S = 0$, enunciando os resultados que aplicar e identificando a fronteira de T, ∂T.

(1.0) **5.** Considere a equação com derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,.$$

Classifique esta equação, e mostre que a mudança de variável

$$\xi(x, y) = x + y\,, \quad \eta(x, y) = x\,,$$

a reduz à sua forma canónica.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

12/02/2004 Cálculo III – Exame (Parte I) **1h10m**

Eng. Electrotécnica e de Computadores

(5.0) **1.** Considere as funções $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, de expressão analítica

$$f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2\,, \quad \boldsymbol{\varphi}(s,t) = (\cos t\,,\ (\sin t)/\sqrt{2}\,,\ s\,,\ 4-s)\,.$$

(a) Defina a função $g \equiv f \circ \boldsymbol{\varphi}$, i.e. indique o seu domínio, conjunto de chegada e expressão analítica.

(b) Aplicando o teorema da derivada da função composta calcule a matriz jacobiana de g.

(c) Identifique o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^2$ que verificam a condição
$C_1 \equiv x = \cos t\,, \quad y = (\sin t)/\sqrt{2}\,, \quad t \in [0, 2\pi]$ ou
$C_2 \equiv u = s\,, \quad v = 4 - s\,, \quad s \in \mathbb{R}$.

(d) Identifique o lagrangiano que lhe permite determinar os pontos de C_1 que estão mais próximos de C_2.

(5.0) **2.** Considere as funções reais definidas em $\mathbb{R}^3$ por

$$g_1(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 1\,, \quad g_2(x,y,z) = x + y + z - 4\,.$$

(a) Mostre que o sistema

$$g_1(x,y,z) = 0\,, \quad g_2(x,y,z) = 0$$

define, nas condições do teorema das funções implícitas, x e z como funções de y numa vizinhança do ponto de coordenadas $(\sqrt{6}/3\,,\ \sqrt{6}/6\,,\ (8-\sqrt{6})/2)$.

(b) Determine a matriz jacobiana da função definida na alínea anterior no ponto $\sqrt{6}/6$.

(c) Analise a dependência funcional das funções g_1, g_2.

(d) Determine a equação cartesiana do plano normal à curva definida por

$$g_1(x,y,z) = 0\,, \quad g_2(x,y,z) = 0\,,$$

no ponto $(\sqrt{6}/3\,,\ \sqrt{6}/6\,,\ (8-\sqrt{6})/2)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

12/02/2004 Cálculo III – Exame (Parte II) **1h10m**

Eng. Electrotécnica e de Computadores

(4.5) **3.** Considere o sólido

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 < 1\,, \quad 0 < z < 4 - x - y\,\}\,.$$

(a) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o volume de T.

(b) Estabeleça o integral que lhe permite calcular a área de superfície de ∂T situada entre os planos $z = 0$ e $z = 1$.

(c) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento da curva C de equação cartesiana, $x^2 + 2y^2 = 1\,, \quad x + y + z = 4\,.$

(4.0) **4.** Seja $\boldsymbol{F}$ um campo de vectores de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}) = 0$.

(b) Calcule o seguinte integral, por definição e aplicando o teorema de Stokes,

$$\int_\gamma \boldsymbol{G} \,|\, \vec{t}\ \mathrm{d}\,t\,, \quad \text{onde} \quad \gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 = 1\,,\ z = 0\}\,,$$

e $\boldsymbol{G}$ é o campo de vectores de expressão analítica $\boldsymbol{G}(x, y, z) = (-y, x, z)$.

(c) Mostre, enunciando os resultados que aplicar, que $\displaystyle\int_L \operatorname{rot}\boldsymbol{F} \,|\, \vec{n}\ \mathrm{d}\,S = 0\,,$ onde $L = \{(\sin s \cos t\,,\ \sin s \sin t\,,\ \cos s)\,, \quad s \in [0, \pi]\,, \quad t \in [0, 2\pi]\}\,.$

(1.5) **5.** Considere a equação com derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\, x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial\, x\, \partial\, y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial\, y^2} + 2\frac{\partial\, z}{\partial\, x} + 6\frac{\partial\, z}{\partial\, y} = 0\,.$$

Classifique esta equação, e determine a mudança de variável que a reduz à forma canónica.
