Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

3/11/2004 Cálculo III – Teste (Parte I) **1h15m**

Destinatários: Eng. Electrotécnica e de Computadores e Lic. em Tecnologias de Informação Visual

---

(2.5) **1.** Sejam f uma função real continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{\phi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\boldsymbol{\phi}(u,v) = (2u+3v\,,\ -3u+2v)$.

(a) Escreva a matriz jacobiana de $F \equiv f \circ \boldsymbol{\phi}$, em termos das derivadas parciais de f.

(b) Mostre que, f verifica $3\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ se, e somente se, $F \equiv f \circ \boldsymbol{\phi}$ verifica a equação diferencial $\dfrac{\partial F}{\partial v} = 0$.

(c) Conclua da alínea anterior que $f(x,y) = h((2x-3y)/13)$, onde h é uma qualquer função real de variável real continuamente diferenciável.

(4.0) **2.** Considere o conjunto $\mathbf{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^3(y^3+z^3) = 0\,,\ (x-y)^3 - z^2 = 7\}$.

(a) Enuncie o teorema da função definida implicitamente por

$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ onde $\mathbf{F}\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(b) Mostre que numa vizinhança do ponto $(1,-1,1)$, o conjunto $\mathbf{C}$ define implicitamente y, z como função de x.

(c) Complete a frase:

— *Numa vizinhança de* $(1,-1,1)$, $\mathbf{C}$ *é ...*

(d) Determine um vector tangente a $\mathbf{C}$ em $(1,-1,1)$.

(3.5) **3.** Sejam $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(x,y) = (x^2 - y\,,\ 2x)$ e o conjunto

$$\mathbf{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x^2+1\,,\ 0 < x < 1\}.$$

(a) Justifique que $\mathbf{g}$ define uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e calcule $|J_{\mathbf{g}^{-1}}|$.

(b) Descreva o conjunto $\mathbf{S}$ no sistema de coordenadas associado a $\mathbf{g}$.

(c) Descreva o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x\,,\ 0 < x < 1\}$ no sistema de coordenadas polares.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

15/12/2004 Cálculo III – Teste (Parte II) **1h15m**

Destinatários: Eng. Electrotécnica e de Computadores e Lic. em Tecnologias de Informação Visual

---

(3.0) **4.** Seja T a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x,y,z > 0\,,\; (x/2)^2 + y^2 + (z/3)^2 < 1\}.$$

(a) Identifique a região T.

(b) Utilizando a mudança de coordenadas

$$x = 2\sqrt{u}\,,\; y = \sqrt{v}\,,\; z = 3\sqrt{w}\,, \quad u,v,w > 0\,,$$

calcule o integral $\displaystyle\int_T xyz \,\mathrm{d}\, V$.

(c) Interprete geometricamente o resultado obtido na alínea anterior.

(5.0) **5.** Considere as superfícies S_1, S_2 definidas por

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = -\sqrt{3(x^2+y^2)}\,,\; -\sqrt{3} \le z \le 0\}\,,$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 = 1\,,\; -\sqrt{3} \le z \le 0\}$$

e o campo de vectores, F, de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ de expressão analítica

$$F(x,y,z) = (e^{yz}\,,\, \sin(x^2+z^2)\,,\, 3z)\,.$$

(a) Determine o rotacional e a divergência de F.

(b) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento da curva intersecção de S_1 com S_2.

(c) Mostre que $\displaystyle\int_{S_1} \operatorname{rot} F \,|\, \vec{n} \,\mathrm{d}\, S = \int_\gamma F |\, \vec{t}\,\mathrm{d}\, s$, enunciando os resultados que aplicar e identificando todos os elementos do problema.

(d) Escreva $\displaystyle\int_G \operatorname{div} F \,\mathrm{d}\, V$, em termos de dois integrais de superfície, onde $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 > z > -\sqrt{3(x^2+y^2)}\,,\; x^2+y^2 < 1\}$, enunciando os resultados que aplicar e identificando todos os elementos do problema.

(2.0) **6.** Mostre que a solução geral da equação

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z\,,$$

é uma função de expressão analítica $z(x,y) = x^2 f(y/x)$, onde f é uma qualquer função real de variável real de classe C^1.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

27/01/2005 Cálculo III – Exame (Parte I) **1h10m**

Destinatários: Eng. Electrotécnica e de Computadores e Lic. em Tecnologias de Informação Visual

---

(3.0) **1.** Sejam f uma função real de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{\phi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\boldsymbol{\phi}(u,v) = (e^{u+v}\,,\, e^{u-v})\,.$$

(a) Escreva a matriz jacobiana de $F \equiv f \circ \boldsymbol{\phi}$, em termos das derivadas parciais de f.

(b) Mostre que, f verifica $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ se, e somente se, $F \equiv f \circ \boldsymbol{\phi}$ é tal que $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$.

(4.0) **2.** Considere as superfícies de $\mathbb{R}^3$, S_1, S_2, definidas, por

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = s-t\,,\ y = s+t\,,\ z = st\,,\ (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\}\,,$$
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 + z^2 = 5\}\,,$$

respectivamente.

(a) Mostre que a superfície S_1 é descrita em coordenadas cartesianas por

$$y^2 - x^2 = 4z\,.$$

(b) Determine uma equação da recta tangente à curva C, intersecção de S_1 e S_2, em $(2\,,\,0\,,\,-1)$.

(c) Determine uma equação do plano tangente à superfície S_1 em $(2\,,\,0\,,\,-1)$.

(d) Dê uma interpretação do resultado da alínea (b) em termos do teorema da função definida implicitamente.

(3.0) **3.** Sejam $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(x,y) = (x - y^2\,,\, y - x^2)$ e o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\,,\ y^2 - 1 < x < 0\}\,.$$

(a) Justifique que $\mathbf{g}$ define uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ e calcule $|J_{\mathbf{g}^{-1}}(-2,0)|$.

(b) Descreva o conjunto S no sistema de coordenadas associado a $\mathbf{g}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

27/01/2005 Cálculo III – Exame (Parte II) **1h10m**

Destinatários: Eng. Electrotécnica e de Computadores e Lic. em Tecnologias de Informação Visual

---

(2.0) **4.** Sejam $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}(x,y) = (x - y^2\,,\, y - x^2)$ e o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\,,\ y^2 - 1 < x < 0\}\,.$$

(a) Identifique a região S.

(b) Calcule o integral

$$\iint_S \frac{(x-y^2)(1-4xy)}{1+(y-x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,,$$

no sistema de coordenadas associado a $\mathbf{g}$.

(6.0) **5.** Sejam $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 < z < 4x\}$ e, $\mathbf{F}$, o campo de vectores de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ de expressão analítica $\mathbf{F}(x,y,z) = (z\,,\, 2+4z\,,\, 3z + e^{xy})$.

(a) Determine o rotacional e a divergência de $\mathbf{F}$.

(b) Estabeleça o integral em coordenadas cilíndricas que lhe permite calcular o volume de E.

(c) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento da curva, C, intersecção das superfícies de $\mathbb{R}^3$ de equação $x^2 + y^2 = z$ e $z = 4x$.

(d) Identifique geometricamente a fronteira de E, como a união de duas superfícies S_1 e S_2.

(e) Supondo a fronteira de E, $S_1 \cup S_2$, orientada positivamente com a normal exterior $\vec{\boldsymbol{n}}$, mostre que

$$\int_{S_1} \mathbf{F}|\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\,S = 3\,\mathrm{volume}\,(E) - \int_{S_2} \mathbf{F}|\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\,S\,.$$

(2.0) **6.** Mostre que a solução geral da equação

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,,$$

é uma função de expressão analítica $z(x,y) = f(y/x)$, onde f é uma qualquer função real de variável real de classe C^1.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

17/02/2005 Cálculo III – Exame (Parte I) **1h10m**

Destinatários: Eng. Electrotécnica e de Computadores e Lic. em Tecnologias de Informação Visual

---

(2.5) **1.** Sejam f uma função real continuamente diferenciável em $\mathbb{R}$ e ϕ definida analiticamente por $\phi(x,y) = y^2/2 + f(x^{-1} + \ln y)$.

(a) Escreva a matriz jacobiana de ϕ.

(b) Mostre que ϕ verifica a equação $x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = y^2$.

(5.0) **2.** Considere as superfícies $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$, definidas por

$\mathbf{S}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ e

$\mathbf{S}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = t\,,\ y = 2t\,,\ z = s\,,\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$.

(a) Identifique geometricamente as superfícies $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$.

(b) Determine uma equação da recta tangente à curva $\mathbf{C}$, intersecção de $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$, em $(2/\sqrt{5}\,,\ 4/\sqrt{5}\,,\ -\sqrt{3})$.

(c) Determine uma equação do plano tangente à superfície $\mathbf{S}_1$ no ponto de coordenadas $(2/\sqrt{5}\,,\ 4/\sqrt{5}\,,\ -\sqrt{3})$.

(d) Enuncie o teorema da função definida implicitamente por

$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ onde $\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

(2.5) **3.** Sejam $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$\mathbf{g}(u,v,w) = (u(1-v)\,,\ uv(1-w)\,,\ uvw)$

e o conjunto $\mathbf{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\}$.

(a) Justifique que $\mathbf{g}$ define uma transformação de coordenadas em $(\mathbb{R}^+)^3$ e calcule $|J_{\mathbf{g}^{-1}}(x,y,z)|$, $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3$.

(b) Descreva o conjunto $\mathbf{S}$ no sistema de coordenadas associado a $\mathbf{g}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

17/02/2005 Cálculo III – Exame (Parte II) **1h10m**

Destinatários: Eng. Electrotécnica e de Computadores e Lic. em Tecnologias de Informação Visual

---

(2.5) **4.** Seja $\mathbf{T}$ a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z<1\,,\ x>0\,,\ y>0\,,\ z>0\}\,.$$

(a) Identifique a região $\mathbf{T}$.

(b) Utilizando a mudança de coordenadas

$$x = u(1-v)\,,\ y = uv(1-w)\,,\ z = uvw\,,\quad u,v,w>0\,,$$

calcule o integral $\displaystyle\int_{\mathbf{T}} \exp(-(x+y+z)^3)\,\mathrm{d}\,V$.

(5.0) **5.** Considere a superfícies $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ definidas por

$$\mathbf{G}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 1-x^2-y^2\,,\ z \geq 0\}\,,$$
$$\mathbf{G}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 1\,,\ z \leq 0\}$$

e o campo de vectores, $\mathbf{F}$, de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ de expressão analítica

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z^2\,,\ z^2\,,\ x^2+y^2+2xz+2yz)\,.$$

(a) Descreva em coordenadas cilíndricas as superfícies $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$.

(b) Estabeleça um integral triplo iterado que lhe permite calcular o volume do sólido cuja fronteira é $\mathbf{G}_1 \cup \mathbf{G}_2$.

(c) Estabeleça o integral que lhe permite calcular a área da superfície $\mathbf{G}_1$.

(d) Mostre que $\displaystyle\int_{\mathbf{G}_1} \mathrm{rot}\,\mathbf{F} \mid \vec{n}_1\,\mathrm{d}\,S = \int_{\mathbf{G}_2} \mathrm{rot}\,\mathbf{F} \mid \vec{n}_2\,\mathrm{d}\,S$, enunciando os resultados que aplicar e identificando todos os elementos do problema.

(2.5) **6.** Mostre que a solução geral da equação

$$x^2\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = y^2\,,$$

é uma função de expressão analítica $z(x,y) = y^2/2 + f(x^{-1}+\ln y)$, onde f é uma qualquer função real de variável real de classe C^1.
