Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Cálculo III – Eng. Electrotécnica
Exame — 9/01/2001
Duração: 3H

(3.0) 1. Seja f a função real definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

(a) Determine o seu domínio de continuidade.

(b) Defina as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ indicando os respectivos domínios de continuidade.

(c) Estude f quanto à diferenciabilidade.

(14.0) 2. Diga, **justificando** o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Seja f uma função real de várias variáveis reais. Então, f é contínua se e somente se f for diferenciável.

(b) Sendo $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x,y) = (x+y\,,\, x-y)$. Então ϕ^{-1} é bijectiva e $\phi^{-1}(x,y) = ((x+y)/2\,,\,(x-y)/2)$.

(c) Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < 4\}$, então

$$\int_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{4/\cos(\theta)} \rho^3 \sin\phi d\rho\,.$$

(d) Uma função real contínua definida em

$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+4y^2 = z^2-1\,,\ 2(x^2+4y^2) = z^2\}$$

atinge em N o seu valor máximo e mínimo absolutos.

(e) Um vector normal à superfície de equação $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ no ponto de coordenadas $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi/4)$ é $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)$.

(f) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = f \circ \phi(x,y)$ e $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $\phi(x,y) = (\log(x+y)\,,\,\log(x-y))$. Se $\dfrac{\partial f}{\partial u}(\log 2, 0) = 1$, então $\dfrac{\partial F}{\partial x}(3/2,1/2) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(3/2,1/2) = 1$.

---

v.s.f.f.

(g) A área de superfície do triângulo de vértices $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ e $C = (0, 0, c)$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ é igual a $\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}/2$.

(h) Seja f uma função real de várias variáveis reais, com derivads parciais contínuas de primeira ordem. Então $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} f) = 0$.

(i) Seja M um conjunto conexo cuja fronteira é uma curva diferenciável, fechada e simples, γ. Então

$$\int_\gamma uv(dx + dy) = \iint_M \left\{ v(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) + u(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}) \right\} dxdy$$

onde u, v são funções de classe C^1.

(3.0) 3. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\vec{j} + e^{-z}\vec{k}$.

Calcule o $\displaystyle\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy + e^{-z} dz$, quando:

(a) $C = \{(x, y, a) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ com $a \in \mathbb{R}$.

(b) C for uma qualquer curva no espaço que não contiver nenhum ponto do eixo OZ no seu interior geométrico.

(c) C é uma qualquer curva fechada, simples, parcialmente suave no plano $z = a$, que contém o ponto (0, 0,a) no seu interior geométrico.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Cálculo III – Eng. Electrotécnica
Exame — 9/02/2001
Duração: 2H30M + 30M

(3.0) 1. Para uma função f a função real definida em $\mathbb{R}^3$. Dê uma definição de:

(a) Diferenciabilidade de f num ponto $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

(b) Extremo global.

(c) Matriz jacobiana e hessiana.

(3.0) 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{3x^2y - 2x^3}{x^2 + y^4}\,,\ (x, y) \neq (0, 0) \ \text{ e } \ f(0, 0) = 0\,.$$

(a) Verifique que f admite em $(0, 0)$, derivada direccional segundo qualquer vector unitário, $u = (\cos\theta, \sin\theta)$, dada por

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial u} = \begin{cases} 3\sin\theta - 2\cos\theta & ,\ \cos\theta \neq 0 \\ 0 & ,\ \cos\theta = 0 \end{cases}\,.$$

(b) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$. Comente o resultado obtido.

(11.0) 3. Diga, **justificando** o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Sejam $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $G(x, y) = h \circ \psi(x, y)$. Sendo $\psi(x, y) = x^2 + y^2$, então

$$y\frac{\partial G}{\partial x} - x\frac{\partial G}{\partial y} = 0\,.$$

(b) Sendo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^2, então

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0\,.$$

(c) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = ax^2y + by^2z + cz^2x\,.$$

Para que o valor máximo do módulo da derivada direccional seja 13 na direcção do vector $(1, 5, 0)$, a, b, c terão de ser iguais a $b = 2a = -c = \sqrt{13/2}$.

---

v.s.f.f.

(d) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y,z) = x^2z + y^2z + \frac{2}{3}z^3 - 4x - 4y - 10z + 1\,.$$

Então f atinge nos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,-1,-2)$, o seu valor mínimo e máximo relativos, respectivamente.

(e) A área de superfície terrestre (de raio r) compreendida entre os meridianos de longitude θ_1, θ_2 e os paralelos de latitude ϕ_1, ϕ_2 é dada por

$$r^2(\theta_2 - \theta_1)(\sin\phi_2 - \sin\phi_1)\,.$$

(f) Sendo $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\,,\ x^2+y^2-z^2 < 0\,,\ z > 0\}$, então $\displaystyle\int_C z\,dV = \frac{\pi}{3}$.

(g) Sendo γ a curva definida pelas equações

$$x = \cos t\,,\ y = \cos 2t\,,\ z = \cos 3t\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,,$$

então $\displaystyle\int_{\gamma^+} (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0.$

(3.0) 4. Seja M um conjunto conexo cuja fronteira é uma curva diferenciável, fechada e simples, γ.

(a) Se u, v são funções de classe C^2, então:

$$\int_\gamma \left\{(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y})dx + (u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x})dy\right\} = \iint_M (u\Delta v - v\Delta u)dxdy$$

onde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

(b) Se u é tal que $\Delta u = 0$, então $\displaystyle\int_\gamma \left\{-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right\} = 0.$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Cálculo III – Eng. Electrotécnica
Exame — 12/10/2001
Duração: 2h30m

(3.0) 1. Seja f uma função diferenciável em $(0,0)$, e tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,.$$

Calcule a derivada direccional de f em $(0,0)$ segundo os seguintes vectores:

(a) $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ com $\theta = \pi/6$.

(b) Na direcção do qual é máxima a derivada direccional.

(c) Na direcção do qual é nula a derivada, indicando o vector.

(5.0) 2. Seja f uma função real definida num domínio, D, de $\mathbb{R}^n$ e ϕ uma função real de variável real definida num intervalo, I, de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que, se ϕ for monótona e $f(D) \subset I$, então os extremantes relativos de f e $g = \phi \circ f$ coincidem.

(b) Supondo f e ϕ diferenciáveis, dê uma condição necessária e suficiente para que os pontos estacionários de f e $g = \phi \circ f$ coincidam.

(c) Tendo em atenção as alíneas anteriores, justifique que as funções reais, f, g, definidas em $]a, +\infty[\times]b, +\infty[$, com $a, b \in \mathbb{R}^+$ por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^3y^3}{(x-a)(y-b)} \\ g(x,y) &= 3\ln x + 3\ln y - \ln(x-a) - \ln(y-b) \end{aligned}$$

têm os mesmos pontos estacionários.

(d) Mostre que o ponto $(3a/2\,,\,3b/2)$ é um minimizante relativo da função g definida na alínea anterior.

(e) Sem efectuar os cálculos, mostre que $(3a/2\,,\,3b/2)$ é minimizante relativo de f.

---

v.s.f.f.

(3.0) 3. Calcule $\int_\Gamma (x+y)dx + (x-y)dy$ ao longo dos seguintes caminhos Γ que unem os pontos $O = (0,0)$ e $M = (\pi, \pi)$:

(a) Segmento de recta $\overline{OM}$.

(b) Curva $y = x + \sin x$.

Comente o resultado obtido.

(9.0) 4. Seja $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\right\}$.

(a) Represente geometricamente a região M.

(b) Justifique que pode tomar (θ, ϕ, ρ) como um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$, onde

$$x = a\rho \sin\phi \cos\theta \ , \quad y = b\rho \sin\phi \sin\theta \ , \quad z = c\rho \cos\phi \, .$$

(c) Descreva o interior geométrico da região M neste novo sistema de coordenadas.

(d) Calcule o volume da região descrita na alínea anterior.

(e) Indique um vector normal unitário, $(\cos\alpha\, , \, \cos\beta\, , \, \cos\gamma)$, à região M em cada um dos seus pontos.

(f) Calcule o integral de superfície

$$\iint_M (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS$$

onde $(\cos\alpha\, , \, \cos\beta\, , \, \cos\gamma)$ é o vector normal unitário à região M.
