Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Cálculo III

Prova Modelo

---

1. Averigue se a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x}, y\right) & , \quad x \neq 0 \\ (0,y) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

---

2. Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície de equações paramétricas

$$x = s + t\,, \quad y = s - t\,, \quad z = s^2 - t^2\,,$$

em $(s,t) = (1,0)$ e $(s,t) = (1,1)$.

---

3. Determine os extremos relativos da função

$$f(x,y) = x \ln x + y \ln y + z \ln z$$

definida para $x, y, z > 0$ e sujeita à seguinte condição $x + y + z = 3a$.

---

4. (a) Calcule $\displaystyle\int_M x^y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ sendo

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b\}.$$

(b) Mostre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{dx} = \ln(b+1) - \ln(a+1)\,.$

---

5. Considere a curva γ definida por $\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.

   (a) Identifique a curva γ.

   (b) Calcule o comprimento da curva a partir do integral de comprimento de arco.

   (c) Calcule $\displaystyle\int_\gamma z\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy} + y^4\,\mathrm{dz}$.

---

v.s.f.f.

6. Calcule $\int_S \overrightarrow{F} \cdot \widehat{n}$ dS onde S é a superfície definida parametricamente por :

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} , \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{array}$$

e $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (z, x, y)$.

7. Sendo $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ x^2 + y^2 - rx \leq 0\}$, mostre que

$$V(T) = \frac{1}{3} \int_S (x, y, z) \cdot \widehat{n} \text{ dS}$$

onde S é a superfície que limita T, orientada com a normal exterior $\widehat{n}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Cálculo III

Exame – 25/01/2002

Destinatários: Eng. Electrotécnica e de Computadores.
Duração: 2h30m

(6.0) 1. Diga, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Seja f uma função real de variáveis reais. Se f não é diferenciável então f não é contínua.

(b) $\displaystyle\iint_D (a^{2/3}-x^{2/3}-y^{2/3})^2 \, \mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = 3\int_0^a (a^{2/3}-u^{2/3})^2 u \, \mathrm{du} \int_0^{2\pi} \sin^2 v \cos^2 v \, \mathrm{dv}$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$ com $a > 0$.
Indicação: Justifique que pode efectuar a mudança de variável

$$x = u\cos^3 v\,, \quad y = u\sin^3 v\,.$$

(c) O plano tangente à superfície de equações paramétricas

$$x = s + t\,, \quad y = s - t\,, \quad z = s^2 - t^2\,.$$

em $(s,t) = (1,0)$ tem equação cartesiana $x + y - z = 1$.

(d) A função real de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} & , \ y \neq x \\ \cos x & , \ y = x \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(8.0) 2. Seja C a curva de intersecção das superfícies de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \quad x + z = 1\,.$$

(a) Identifique geometricamente a curva C.

(b) Determine as equações paramétricas da curva C.

(c) Determine um vector tangente à curva C em cada um dos seus pontos.

(d) Determinar os pontos de C que estão mais próximos de $(0,0,2)$.

(e) Calcule o comprimento da curva C a partir do integral de comprimento de arco.

(f) Calcule $\displaystyle\int_C z\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy} + y^4\,\mathrm{dz}$.

---

v.s.f.f.

(6.0) 3. Considere o sólido definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2\,,\ x^2 + y^2 + z^2 < 2x\,,\ y < 0\}\,.$$

(a) Represente-o graficamente.

(b) Descreva S em coordenadas cilíndricas.

(c) Descreva S em coordenadas esféricas.

(d) Calcule $\displaystyle\iiint_S$ dV e interprete o resultado obtido.

(e) Seja F a união das superfícies não planas que limitam S, orientada com a normal exterior $\vec{n}$. Mostre que

$$V(S) = \frac{1}{3}\int_F (x, y, z)|\vec{n}\ \mathrm{ds}$$

Cálculo III

Exame – 15/02/2002

Destinatários: Eng. Electrotécnica e de Computadores.
Duração: 2h30m

(5.0) 1. Diga, **justificando**, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) A função real de duas variáveis reais f definida por

$$f(x,y) = x^2(1+\sin(1/x)) \text{ se } x \neq 0 \quad \text{e} \quad f(0,0) = 0$$

é diferenciável em $(0,0)$.
Indicação: Defina função diferenciável.

(b) $\displaystyle\iint_D x^y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \ln(b+1) - \ln(a+1)$, onde $D = [0,1] \times [a,b]$ com $a > 0$.

(c) A função real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2\,,$$

atinge em $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(0,0)$ valores de mínimo e máximo relativos, respectivamente.

(d) Sejam f uma função real de duas variáveis reais (u,v) com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e F uma função real de duas variáveis reais definida por $F(x,y) = f \circ \phi(x,y)$ onde $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem expressão analítica

$$\phi(x,y) = (\log(x+y)\,,\, \log(x-y))\,.$$

Se $\dfrac{\partial f}{\partial u}(\log 2, 0) = 1$, então $\operatorname{grad} F(3/2, 1/2) | (1,1) = 1$.

(5.0) 2. Seja C a curva de intersecção das superfícies de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \quad x^2 + z^2 = x\,, \quad \text{em} \quad y \geq 0\,.$$

(a) Determine um vector tangente à curva C em cada um dos seus pontos.

(b) Indique o integral que lhe permite calcular o comprimento da curva C.
Indicação: Descreva a curva em coordenadas cilíndricas.

(c) Verifique se o campo de vectores $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = (2x^3 + x - y^2 - 2xy, 2y^3 + y - x^2 - 2xy, -1)$$

é conservativo.

(d) Calcule $\displaystyle\int_C (2x^3 + x - y^2 - 2xy)\,\mathrm{dx} + (2y^3 + y - x^2 - 2xy)\,\mathrm{dy} - \mathrm{dz}$.

---

v.s.f.f.

(10.0) 3. Seja S a superfície de equação

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1\,.$$

(a) Identifique geometricamente a superfície S.

(b) Justifique que pode tomar (θ, ϕ, ρ) como um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$, onde

$$x = 2\rho \sin\phi \cos\theta\ , \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta\ , \quad z = 3\rho\cos\phi\,.$$

(c) Mostre que a equação cartesiana do plano tangente a S em $(a, b, c) \in S \cap (\mathbb{R}^+)^3$ é dada por

$$\frac{ax}{4} + by + \frac{cz}{9} = 1\,.$$

(d) Mostre utilizando cálculo integral que a área de superfície do triângulo de vértices $(A, 0, 0)$, $(0, B, 0)$ e $(0, 0, C)$ com $A, B, C \in \mathbb{R}^+$ é igual a

$$\sqrt{A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2}/2\,.$$

Utilize este resultado para calcular a área de superfície de

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x, y, z > 0\,,\ \frac{ax}{4} + by + \frac{cz}{9} = 1\}\,.$$

(e) Indique o integral triplo iterado que lhe permite calcular o volume, V, do sólido

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x, y, z > 0\,,\ \frac{ax}{4} + by + \frac{cz}{9} < 1\}\,.$$

Note que V é função de (a, b, c).

(f) Determine o mínimo de V sobre S, onde V é o volume de R.
Indicação: Caso não tenha calculado o integral da alínea (e), considere que $V(a, b, c) = \dfrac{6}{abc}$.

(g) Relacione o volume do sólido R com o integral

$$\iint_Q (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\ \mathrm{dS}\,,$$

onde $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ é o vector normal unitário exterior a R.