

(5.0) 1. Seja $\vec{F}$ um campo de vectores de classe C^2 definido em $\mathbb{R}^3$.

(a) Defina rotacional de $\vec{F}$.

(b) Defina divergência de $\vec{F}$.

(c) Mostre que $\text{rot}(\text{rot}\vec{F}) = \text{grad}(\text{div}\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$, onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

(6.0) 2. Considere o sistema de equações $e^{x-u} + yv + 3 = 0$, $e^{y+v} - xu = 0$.

(a) Mostre que o sistema define, nas condições do teorema das funções implícitas, (u, v) como função de (x, y) numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 2, 1, -2)$.

(b) Calcule a matriz Jacobiana (ou o diferencial) da função, g , definida na alínea anterior no ponto $(1, 2)$.

(c) Justifique que g é localmente invertível e indique sem calcular $|J_{g^{-1}}(1, -2)|$.

(6.0) 3. Seja C a curva de equação cartesiana $z = x^3 + y$, $\frac{3}{2}x^2 + y^2 = \frac{7}{4}$.

(a) Identifique o lagrangiano que lhe permite calcular os pontos de cota máxima de C .

(b) Sabendo que os pontos candidatos a extremante são

$$\pm(0, \sqrt{7}/2, \sqrt{7}/2), \pm(1, 1/2, 3/2), \pm(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/2, 19\sqrt{6}/36),$$

resolva o problema enunciado na alínea anterior. Justifique convenientemente a sua resposta.

(c) Verifique que $x = \sqrt{7/6} \cos t$, $y = \sqrt{7}/2 \sin t$, $z = (7/6)^{3/2} \cos^3 t + \sqrt{7}/2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ é uma parametrização da curva C . Calcule um vector tangente a C no ponto $(1, 1/2, 3/2)$.

(3.0) 4. Considere o integral $\int_0^\infty e^{-t} \cos(xt) \, dt$.

(a) Verifique que é uniformemente convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Calcule $\int_0^\infty dt \int_0^1 e^{-t} \cos(xt) \, dx$.

- (4.0) 1. Considere o sistema de equações $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, onde f_1 e f_2 são duas funções reais definidas em $\mathbb{R}^3$ por

$$f_1(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 2, \quad f_2(x, y, z) = 2y + z - 2.$$

- (a) Mostre que o sistema define, nas condições do teorema das funções implícitas, y, z como funções de x numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 2)$.
- (b) Verifique que $\text{grad } f_1 \times \text{grad } f_2 \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$, para todos os pontos que verificam o sistema.
- (c) Justifique que o sistema define uma curva diferenciável C em $\mathbb{R}^3$, que passa pelo ponto $(0, 0, 2)$.
- (d) Determine as equações paramétricas da recta tangente à curva C definida pelo sistema dado, no ponto $(0, 0, 2)$.

-
- (4.0) 2. Considere a curva C de equações cartesianas

$$z = -x^2 - y^2 + 2, \quad 2y + z = 2.$$

- (a) Identifique o lagrangiano que lhe permite determinar os pontos de C cuja distância à origem das coordenadas é máxima ou mínima.
- (b) Mostre que

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad z = -2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

define uma parametrização da curva C .

- (c) Justifique que o problema enunciado na alínea (a) é equivalente a determinar os extremos da função real de variável real de expressão analítica

$$f(t) = 2 + 2 \sin t + 4 \sin^2 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Resolva o problema enunciado em (a).

-
- (2.0) 3. Considere o integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx$.

- (a) Verifique que o integral dado é uniformemente convergente para todo o $y \in \mathbb{R}^+$.

Indicação: Justifique que pode usar como função de comparação e^{-x} .

- (b) Calcule $\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx$.

Indicação: Justifique que pode usar coordenadas polares.

(6.0) 4. Considere a curva C de equações cartesianas

$$z = -x^2 - y^2 + 2, \quad 2y + z = 2,$$

e o campo de vectores, F , definido em $\mathbb{R}^3$ por $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

- (a) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento de C .
(b) Verifique que o campo de vectores F é conservativo e determine uma função real, f , definida em $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{grad } f = F$.

(c) Mostre que $\int_C (y + z) \, dx + (x + z) \, dy + (x + y) \, dz = 0$.

(d) Mostre que $\iint_T F(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS = 0$, onde $T = T_1 \cup T_2$ com

$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x^2 - y^2 + 2, \quad 2y + z \geq 2\},$$

$$T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq -x^2 - y^2 + 2, \quad 2y + z = 2\},$$

e $\vec{n}$ é o vector normal unitário, exterior a T .

(e) Estabeleça o integral duplo que lhe permite calcular $\iint_{T_2} F(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS$.

(2.0) 5. Considere o campo de vectores, F , definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 1, 0)\}$ por

$$F(x, y, z) = (y - 1, -x, 2x).$$

- (a) Determine as curvas integrais de F .
(b) Determine a superfície que verifica

$$(y - 1) \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 2x,$$

e que passa pela circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 1$.

(2.0) 6. Considere a equação com derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

- (a) Classifique-a.
(b) Mostre que uma mudança de variável que reduz a equação dada à forma canónica é $\xi = x + y, \quad \eta = 3x - y$.
-

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
Cálculo III - Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Resolução do Exame de 31/01/2003

1. (a). Pode ver-se que $f_1(0, 0, 2) = 0 = f_2(0, 0, 2)$ e como f_1, f_2 são funções polinomiais, são de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Temos então que provar que $\left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)} \right|_{(0,0,2)} \neq 0$, i.e.

$$\left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)} \right|_{(0,0,2)} = \begin{vmatrix} 2y & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}_{(0,0,2)} = -2 \neq 0. \quad \blacksquare$$

1. (b). Vimos na alínea anterior que o ponto $(\sqrt{2}, 2, -1)$ verifica o sistema dado. Além disso, $\text{grad } f_1 \times \text{grad } f_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(y-1, x, 2x)$, que é o vector nulo se $x = 0, y = 1$. Como os pontos da forma $(0, 1, z)$ não verificam simultaneamente as duas equações dadas, i.e. $f_1(0, 1, z) = 0$ implica que $z = 1$ e $f_2(0, 1, 1) = 1 \neq 0$, temos o pretendido. $\blacksquare$

1. (c). Da alínea (b) sabemos que f_1, f_2 são funções diferenciáveis funcionalmente independentes, que verificam $f_1(0, 0, 2) = 0 = f_2(0, 0, 2)$, pelo que o sistema define uma curva diferenciável que passa por $(0, 0, 2)$, que denotaremos por C . $\blacksquare$

1. (d). Seja $P_0 = (0, 0, 2)$. Como um vector tangente a C em P_0 é dado por

$$\vec{v} = \text{grad } f_1(P_0) \times \text{grad } f_2(P_0) = (-2, 0, 0),$$

temos que a equação vectorial da recta pedida é

$$P \in \mathbb{R}^3: \overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R},$$

e portanto as equações paramétricas da recta são dadas por

$$x = t, y = 0, z = 2, t \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

2. (a). O problema proposto é o de

$$\text{ext}_{(x,y,z) \in C} F(x, y, z), \quad \text{com} \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, construímos a função auxiliar, lagrangiano

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(z + x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(2y + z - 2),$$

e determinamos os seus pontos críticos, que verificam

$$z + x^2 + y^2 = 2, \quad 2y + z = 2, \quad \text{i.e.} \quad (x, y, z) \in C. \quad \blacksquare$$

2. (b). O sistema de equações dado é equivalente ao

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1, \quad z = 2(1 - y),$$

que em coordenadas cilíndricas tem a representação dada. ■

2. (c). Tendo em atenção a representação paramétrica da curva C dada na alínea (b) vemos que o problema

$$\text{ext}_{(x,y,z) \in C} F(x, y, z) \equiv \text{ext}_{t \in [0, 2\pi]} f(t), \quad \text{com} \quad f(t) = F \circ \varphi(t),$$

onde φ é a função vectorial definida em $[0, 2\pi]$ por $\varphi(t) = (\cos t, 1 + \sin t, -2 \sin t)$. Pode agora ver-se que a expressão analítica de f é dada por $f(t) = 2 + 2 \sin t + 4 \sin^2 t$.

A função real de variável real f é diferenciável e está definida num intervalo fechado, logo atinge aí o seu valor máximo e o seu valor mínimo. Assim, os extremantes de f estão no conjunto de pontos formado, pelos pontos críticos de f , juntamente com os extremos do intervalo de definição de f , i.e. 0 e 2π .

Os pontos críticos de f são

$$t \in]0, 2\pi[: \cos t(1 + 4 \sin t) = 0, \quad \text{i.e.}$$

$t \in \{\pi/2, \pi + \theta_0, 3\pi/2, 2\pi - \theta_0\}$ onde $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ tal que $\theta_0 = \arcsin 1/4$.

Comparando os valores de f nos pontos críticos mais os pontos 0 e 2π , vemos que o máximo de f é atingido em $\pi/2$ e é igual a 8, e o mínimo de f é atingido em $\pi + \theta_0$ e $2\pi - \theta_0$ e é igual a $7/4$.

Da análise aqui realizada concluímos que as soluções do problema inicial são,

$$F(0, 1, -2) = 8 - \text{máximo} \quad \text{e} \quad F(\pm\sqrt{15}/4, -1/4, 1/2) = 7/4 - \text{mínimo}. \quad \blacksquare$$

3. (a). Os integrais

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx, \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx$$

são da mesma natureza pois diferem do integral paramétrico definido $\int_0^1 e^{-x^2-y^2} \, dx$.

Agora para $x \in [1, +\infty[$, $x \leq x^2$, e como a função de expressão analítica $f(x) = e^{-x}$ é uma monótona decrescente, temos que $e^{-x^2-y^2} \leq e^{-x}$, $x \in [1, +\infty[$.

Por outro lado, $\int_1^{+\infty} e^{-x} \, dx = 1/e$, donde pelo critério de Cauchy, podemos concluir que o integral paramétrico é uniformemente convergente em $\mathbb{R}^+$. ■

3. (b). A aplicação vectorial definida em $[0, \pi/2] \times [0, +\infty[$ por $\varphi(t, r) = (r \cos t, r \sin t)$, é bijectiva sobre $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e o seu jacobiano é r . Assim,

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx = \int_0^{\pi/2} dt \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr,$$

pelo que o seu valor é $\pi/4$. ■

4. (a). Vimos na alínea 2. (b) que uma parametrização para a curva C vem dada por

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad z = -2 \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

pelo que um vector tangente a C em cada um dos seus pontos está definido por $\vec{T} = (-\sin t, \cos t, -2 \cos t)$. Assim o integral procurado está definido por

$$\int_C \|\vec{T}\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4 \cos^2 t} dt. \quad \blacksquare$$

4. (b). O campo de vectores F é conservativo se $\text{rot } F = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$. Por definição

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}.$$

Pelo que $\text{rot } F = (0, 0, 0)$. Daqui se conclui que existe uma função real de classe C^1 definida em $\mathbb{R}^3$ tal que $F(x, y, z) = \text{grad } f(x, y, z)$, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x + y.$$

Da primeira condição obtemos por primitivação relativamente à variável x que existe uma função real de classe C^1 , h , tal que $f(x, y, z) = (y + z)x + h(y, z)$. Derivando em ordem à variável y e comparando com a segunda condição inicial temos, que existe uma função real de classe C^1 , g , tal que $h(y, z) = yz + g(z)$. Assim, $f(x, y, z) = xy + xz + yz + g(z)$, para alguma função real de variável real g de classe C^1 . Derivando esta função em ordem à variável z e comparando com a terceira condição inicial temos que $g \equiv c$ com c constante real arbitrária. Pelo que um exemplo de função f procurada tem expressão analítica $f(x, y, z) = xy + xz + yz$. ■

4. (c). Vimos na alínea anterior que existe $f \in C^1$ tal que $F = \text{grad } f$. Assim se provarmos que a curva diferenciável C é fechada temos o pretendido. De facto,

$$\int_C (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz = \int_0^{2\pi} \text{grad } f \circ \varphi(t) D \varphi(t) dt$$

onde $\varphi(t) = (\cos t, 1 + \sin t, -2 \sin t)$, pelo que este integral é igual a $f \circ \varphi(2\pi) - f \circ \varphi(0)$.

Agora, facilmente se vê que $\varphi(2\pi) = (1, 1, 0) = \varphi(0)$, pelo que temos o que queríamos demonstrar.

Alternativamente, esta mesma conclusão pode tirar-se da análise realizada na alínea 2. (b), pois vimos que a curva C é uma elipse de equação $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ no plano $z = 2(1 - y)$ (cf. figura 1), logo é uma curva fechada. ■

4. (d). Como T é uma superfície que delimita um sólido (cf. figura 1), e F é uma função vectorial de classe $C^1(\text{int } T)$ estamos nas condições do teorema da divergência. Assim,

$$\iint_T F(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\text{int}(T)} \text{div } F \, dV = 0. \quad \blacksquare$$

4. (e). A superfície T_2 admite a seguinte parametrização

$$x = r \cos t, \quad y = 1 + r \sin t, \quad z = -2r \sin t, \quad (t, r) \in [0, 2\pi] \times [0, 1].$$

Assim, o vector normal a T_2 vem dado por

$$\vec{n} = \left(\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, r)} \right|, \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(t, r)} \right|, \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, r)} \right| \right) = (0, 2r, r),$$

e portanto o integral toma a forma

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 [(r \cos t - 2r \sin t)2r + (r \cos t + r \sin t + 1)r] \, dr = \pi. \quad \blacksquare$$

5. (a). Na alínea 1. (b) vimos que $\text{grad } f_1 \times \text{grad } f_2 = 2F$, pelo que as curvas integrais de F virão dadas por

$$z + x^2 + y^2 = c_1, \quad 2y + z = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{tais que} \quad F(x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Não entrando em consideração com os dados contidos na alínea 1. (b), determinamos as curvas integrais a partir das soluções funcionalmente independentes do sistema de equações diferenciais lineares

$$\frac{dx}{y-1} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{2x}.$$

Da primeira equação obtemos $-x^2/2 = y^2/2 - y + c$, i.e. $x^2 + y^2 - 2y = c_1$ e da segunda $2y + z = c_2$. Note-se que provámos já a independencia funcional destas duas soluções (cf. alínea 1. (a)). ■

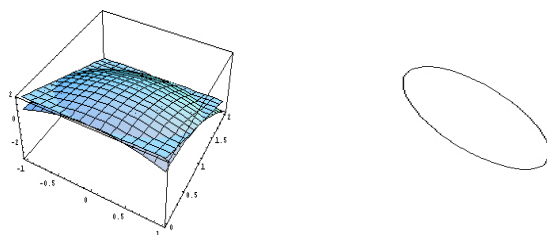


FIGURA 1. Curva C

5. (b). A solução geral da equação dada admite uma representação na forma $z = -2y + \psi(x^2 + y^2 - 2y)$, com $\psi \in C^1$. Por forma a verificar as condições do enunciado temos

$$1 = -2y + \psi(1 - 2y), \quad \text{i.e.} \quad \psi(1 - 2y) = 2 - (1 - 2y),$$

e portanto $\psi(t) = -t + 2$, donde se concluí que a superfície procurada tem equação $z + x^2 + y^2 = 2$. ■

6. (a). Trata-se de uma equação com derivadas parciais de segunda ordem hiperbólica, pois $\Delta = (1)^2 - (-3)(1) = 4 > 0$. ■

6. (b). Sabemos que a mudança de variável procurada, é determinada a partir das soluções funcionalmente independentes da equação diferencial de primeira ordem,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0,$$

donde se concluí que $\xi(x, y) = y - 3x$ e $\eta(x, y) = y + x$ é a mudança aconselhável para a redução à forma canónica da equação dada. ■

(3.75) 1. Considere o sistema de equações

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

onde f_1 e f_2 são duas funções reais definidas em $\mathbb{R}^3$ por

$$f_1(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + z^2 - 4, \quad f_2(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 - 3z^2.$$

- (a) Mostre que o sistema dado define, nas condições do teorema das funções implícitas, x e z como funções de y numa vizinhança do ponto $(\sqrt{2}, 2, -1)$.
- (b) Justifique que o sistema dado define uma curva diferenciável C_1 no hiperplano $\mathbb{R}^2 \times]-\infty, 0]$, que passa pelo ponto $(\sqrt{2}, 2, -1)$.
- (c) Determine a equação cartesiana do plano tangente à superfície S definida pela equação $x^2 + (y - 1)^2 = 3z^2$ no ponto $(\sqrt{2}, 2, -1)$.

(3.75) 2. Considere a curva $C_2 \subset \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[$ de equações cartesianas

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + (y - 1)^2 = 3z^2.$$

- (a) Identifique o lagrangiano que lhe permite determinar os pontos de C_2 que maximizam e minimizam a função $g(x, y, z) = (10 - x - y - z)/\sqrt{3}$.
- (b) Mostre que

$$x = \sqrt{3} \cos t, \quad y = 1 + \sqrt{3} \sin t, \quad z = 1, \quad t \in [0, 2\pi],$$

define uma parametrização da curva C_2 .

- (c) Justifique que o problema enunciado na alínea (a) é equivalente a determinar os extremos da função real de variável real de expressão analítica

$$f(t) = 8/\sqrt{3} - (\sin t + \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Resolva o problema enunciado em (a).

(2.5) 3. Considere a função real definida em $]0, +\infty[$ por $f(t) = \int_0^t \frac{dx}{x^2 + t^2}$.

- (a) Calcule o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

- (b) Calcule o integral $\int_0^t \frac{dx}{(x^2 + t^2)^2}$.
-

(6.5) 4. Considere a curva $C_1 \subset \mathbb{R}^2 \times]-\infty, 0]$ de equações cartesianas

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + (y - 1)^2 = 3z^2,$$

e o campo de vectores, F , definido em $\mathbb{R}^3 \setminus D$ por

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1 - y}{x^2 + (y - 1)^2}, \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2}, 3z \right),$$

onde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 1\}$.

- Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento de C_1 .
- Estabeleça o integral que lhe permite calcular o volume da região T definida por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 \leq 4, x^2 + (y - 1)^2 \geq 3z^2, z \leq 0\}$.
- Mostre que $\int_{C_1} \frac{1 - y}{x^2 + (y - 1)^2} dx + \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2} dy + 3z dz = 2\pi$.
- Mostre que $\int_G \frac{1 - y}{x^2 + (y - 1)^2} dx + \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2} dy + 3z dz = 0$, onde G é uma qualquer curva diferenciável e fechada que não contém nenhum ponto do conjunto D no seu interior geométrico.
- Estabeleça o integral duplo que lhe permite calcular $\iint_{\partial T_1} F(x, y, z) \cdot \vec{n} dS$, onde $\partial T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4, x^2 + (y - 1)^2 \geq 3z^2, z \leq 0\}$ e $\vec{n}$ é a normal unitária a ∂T_1 .
- Justifique, sem calcular, a seguinte igualdade $\iint_{\partial T} F(x, y, z) \cdot \vec{n} dS = 3 \text{ volume}(T)$, onde ∂T representa a fronteira do conjunto T e $\vec{n}$ a normal unitária exterior a T .

(1.75) 5. Considere a função vectorial, F , de expressão analítica

$$F(x, y, z) = ((y - 1)z, -xz, 0).$$

- Indique uma região de $\mathbb{R}^3$ onde $F \neq (0, 0, 0)$.
- Determine a solução geral da equação $(y - 1)z \frac{\partial u}{\partial x} - xz \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

(1.75) 6. Considere a equação com derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sin(2x)}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

- Classifique-a.
- Mostre que uma mudança de variável que reduz a equação dada à forma canónica é $\xi = x + y + \cos x, \quad \eta = -x + y + \cos x$.

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
Cálculo III - Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Resolução do Exame de 20/02/2003

1. (a). Pode ver-se que $f_1(\sqrt{2}, 2, -1) = 0 = f_2(\sqrt{2}, 2, -1)$ e como f_1, f_2 são funções polinomiais, são de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Temos então que provar que $\left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, z)} \right|_{(\sqrt{2}, 2, -1)} \neq 0$,

$$\left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, z)} \right|_{(\sqrt{2}, 2, -1)} = \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 2x & -6z \end{vmatrix}_{(\sqrt{2}, 2, -1)} = 16\sqrt{2} \neq 0. \quad \blacksquare$$

1. (b). Vimos na alínea anterior que o ponto $(\sqrt{2}, 2, -1)$ verifica o sistema dado. Além disso, $\text{grad } f_1 \times \text{grad } f_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2(y-1) & 2z \\ 2x & 2(y-1) & -6z \end{vmatrix} = 16(-z(y-1), xz, 0)$, que é o vector nulo se $x = 0$, $y = 1$ e z qq. em $\mathbb{R}$ ou em pontos da forma $(a, b, 0)$ onde $a, b \in \mathbb{R}$. Como estes pontos não verificam simultaneamente as duas equações dadas, temos que f_1, f_2 são funções diferenciáveis funcionalmente independentes em $\mathbb{R}^2 \times]-\infty, 0[$.

Assim, o sistema define uma curva diferenciável que passa por $(\sqrt{2}, 2, -1)$, que denotaremos por C_1 . ■

1. (c). Seja $P_0 = (\sqrt{2}, 2, -1)$. Como um vector normal a S em P_0 é dado por

$$\vec{n} = \text{grad } f_2(P_0) = 2(\sqrt{2}, 1, 3),$$

temos que a equação cartesiana do plano vem dada por

$$P \in \mathbb{R}^3: \overrightarrow{P_0P} \mid \vec{n} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{2}x + y + 3z = 1. \quad \blacksquare$$

2. (a). O problema proposto é o de

$$\text{ext}_{(x,y,z) \in C_2} g(x, y, z), \quad \text{com} \quad g(x, y, z) = (10 - x - y - z)/\sqrt{3}.$$

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, construímos a função auxiliar, lagrangiano, F , como a função de expressão analítica

$$(10 - x - y - z)/\sqrt{3} - \lambda_1(x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 4) - \lambda_2(x^2 + (y-1)^2 - 3z^2),$$

e determinamos os seus pontos críticos, que verificam

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + (y-1)^2 = 3z^2, \quad z \geq 0, \quad \text{i.e.} \quad (x, y, z) \in C_2. \quad \blacksquare$$

2. (b). O sistema de equações dado é equivalente ao

$$x^2 + (y - 1)^2 = 3, \quad z = 1, \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \times [0, \infty[,$$

que em coordenadas cilíndricas tem a representação dada. ■

2. (c). Tendo em atenção a representação paramétrica da curva C_2 dada na alínea (b) vemos que o problema

$$\text{ext}_{(x,y,z) \in C_2} g(x,y,z) \equiv \text{ext}_{t \in [0,2\pi]} f(t), \quad \text{com } f(t) = g \circ \varphi(t),$$

onde φ é a função vectorial definida em $[0, 2\pi]$ por $\varphi(t) = (\sqrt{3} \cos t, 1 + \sqrt{3} \sin t, 1)$. Pode agora ver-se que a expressão analítica de f é dada por $f(t) = 8/\sqrt{3} - (\sin t + \cos t)$, ou ainda $f(t) = 8/\sqrt{3} - \sqrt{2} \sin(t + \pi/4)$, $t \in [0, 2\pi]$.

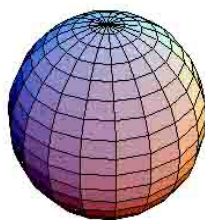
Assim, o valor máximo e mínimo de f em $[0, 2\pi]$ vêm dados por $f(5\pi/4) = 8/\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $f(\pi/4) = 8/\sqrt{3} - \sqrt{2}$, respectivamente. ■

3. (a). Tendo em atenção que f se pode escrever na forma $f(t) = 1/t \int_0^t \frac{1/t}{1 + (x/t)^2} dx$ temos que $f(t) = \pi/(4t)$. Assim, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. ■

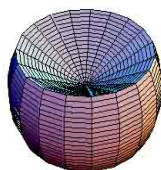
3. (b). Como a função de expressão analítica $g(x, t) = 1/(x^2 + t^2)$ é de classe $C^1(\mathbb{R}^+)$ podemos aplicar o teorema da diferenciabilidade de integrais paramétricos. Assim,

$$-\frac{\pi}{4t^2} = f'(t) = \int_0^t \frac{-2t}{(x^2 + t^2)^2} dx + \frac{1}{2t^2},$$

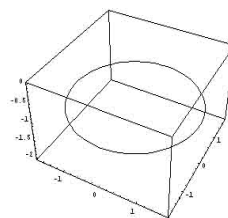
e portanto, $\int_0^t \frac{dx}{(x^2 + t^2)^2} = \frac{2 + \pi}{8t^3}$. ■



Esfera



Cone/Esfera



Curva C_1

FIGURA 2

4. (a). Da análise feita na alínea 2. (b) vemos que uma parametrização para a curva C_1 vem dada por (cf. figura 1)

$$x = \sqrt{3} \cos t, \quad y = 1 + \sqrt{3} \sin t, \quad z = -1, \quad t \in [0, 2\pi],$$

pelo que um vector tangente a C em cada um dos seus pontos está definido por $\vec{T} = (-\sqrt{3} \sin t, \sqrt{3} \cos t, 0)$. Assim o integral procurado está definido por

$$\int_C \|\vec{T}\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{3 \sin^2 t + 3 \cos^2 t} \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{3} \, dt. \quad \blacksquare$$

4. (b). Descrevendo a região em coordenadas esféricas temos (cf. figura 1)

$$x = 2r \sin s \cos t, \quad y = 1 + 2r \sin s \sin t, \quad z = 2r \cos s,$$

com $r \in [0, 1]$, $s \in [\pi/3, 2\pi/3]$ e $t \in [0, 2\pi]$ e como o jacobiano da mudança de coordenadas vem dado por $2r^2 \sin s$, temos que o volume da região dada está determinado pelo integral $\iiint dV = \int_0^{2\pi} dt \int_{\pi/3}^{2\pi/3} ds \int_0^1 2r^2 \sin s \, dr$. $\blacksquare$

4. (c). Por definição o integral pedido toma a forma,

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sqrt{3} \sin t}{3} (-\sqrt{3} \sin t) + \frac{\sqrt{3} \cos t}{3} (\sqrt{3} \cos t) + (-3) \times 0 \right) dt$$

pelo que $I = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$. $\blacksquare$

4. (d). O campo de vectores F é de classe $C^1(\text{int } G)$ e admite a representação $F(x, y, z) = \text{grad } f$ onde f é a função real definida em $\mathbb{R}^3 \setminus D$ por $f(x, y, z) = \arctan((y-1)/x) + 3z^2/2$. Aplicando o teorema de Stokes temos o pretendido. $\blacksquare$

4. (e). A superfície T_1 admite a seguinte parametrização (cf. figura 1)

$$x = 2 \sin s \cos t, \quad y = 1 + 2 \sin s \sin t, \quad z = 2 \cos s, \quad (s, t) \in [\pi/3, 2\pi/3] \times [0, 2\pi].$$

Assim, o vector normal a T_1 vem dado por

$$\vec{n} = \left(\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(s, t)} \right|, \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(s, t)} \right|, \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right| \right) = (4 \sin^2 s \cos t, 4 \sin^2 s \sin t, 2 \sin(2s)),$$

e portanto o integral toma a forma

$$\int_0^{2\pi} dt \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left(\frac{-2 \sin s \sin t}{4 \sin^2 s} 4 \sin^2 s \cos t + \frac{2 \sin s \cos t}{4 \sin^2 s} 4 \sin^2 s \sin t + 3(2 \cos s)(4 \sin s \cos s) \right) ds$$

e portanto o integral de superfície vem dado por $24 \int_0^{2\pi} dt \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos^2 s \sin s \, ds$. $\blacksquare$

4. (f). Como ∂T é a superfície de classe C^1 que delimita o sólido T , e F é uma função vectorial de classe $C^1(\text{int } T)$ estamos nas condições do teorema da divergência. Assim,

$$\iint_{\partial T} F(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\text{int}(T)} \text{div } F \, dV = 3 \iiint_{\text{int}(T)} dV = 3 \text{volume}(T). \quad \blacksquare$$

5. (a). Pode ver-se que este campo de vectores é, a menos de uma constante multiplicativa, o campo de vectores da alínea 1. (b), i.e. $\text{grad } f_1 \times \text{grad } f_2 = -16F$. Assim, $F \neq (0, 0, 0)$ quando e só $(x, y, z) \in D$ com quando

$$D = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}). \quad \blacksquare$$

5. (b). A solução geral da equação com derivadas parciais linear dada tem expressão analítica $u = f \circ \phi(x, y, z)$, com f uma função arbitrária em $C^1(\mathbb{R}^2)$ e ϕ é uma função vectorial definida em D por $\phi(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$, e f_1, f_2 são as funções do exercício 1. ■

6. (a). Trata-se de uma equação com derivadas parciais de segunda ordem hiperbólica, pois $\Delta = \sin^2 x - (-\cos^2 x)(1) = 1 > 0$. ■

6. (b). Sabemos que a mudança de variável procurada, é determinada a partir das soluções funcionalmente independentes da equação diferencial de primeira ordem,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2 \sin x \frac{dy}{dx} - \cos x = 0,$$

donde se conclui que $\xi(x, y) = x + y + \cos x$ e $\eta(x, y) = -x + y + \cos x$ é a mudança aconselhável para reduzir à forma canónica a equação dada. ■