Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
Cálculo III - Engenharia Electrotécnica
Caderno de Exercícios

NOÇÕES GEOMÉTRICAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Limite, continuidade e diferenciabilidade de funções vectoriais

1. Considere o campo de vectores F definido por

$$F(x,y) = \left((x^2+2y^2)\sin\frac{1}{xy}, \frac{3x^2y}{x^2+2y^2}+1, \sqrt{x^2+y^2} \right).$$

   (a) Indique as funções coordenadas.

   (b) Determine o domínio de definição de F.

   (c) Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = (0,1,0)$.

2. Considere o campo de vectores F definido por

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

   (a) Identifique as funções coordenadas.

   (b) Determine o domínio de definição de F.

   (c) Determine o domínio de continuidade de F.

   (d) Construa a matriz jacobiana de F e indique o seu domínio de definição.

3. Considere o campo de vectores F definido por

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(y^2 + x^2 \sin\frac{1}{x},\, y\right) & , \quad x \neq 0 \\ (0,\, y) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) Identifique as funções coordenadas.

   (b) Determine o domínio de definição de F.

   (c) Calcule, caso exista,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} F(x,y).$$

   (d) Determine o domínio de continuidade de F.

4. Calcule as matrizes jacobianas das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = (x\sin y,\, y^2 e^x)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) $g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2,\, \sin(x\,z))\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

   (c) $h(t) = \cos t\,\hat{\imath} + \sin t\,\hat{\jmath}\,, \quad t \in [0, 2\pi]$;

   (d) $\varphi(u,v,w) = e^u(\cos v \sin w \hat{\imath} + \sin v \sin w \hat{\jmath} + \cos w \hat{\kappa})\,, \quad (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.

5. Construa as matrizes jacobianas das seguintes funções, e calcule o seu determinante:

   (a) $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\,, \quad r \geq 0\,, \quad \theta \in]-\pi,\pi\,]$;

   (b) $G(\rho,\theta,\phi) = (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\,, \quad \rho \geq 0\,, \quad \phi \in [\,0,\pi\,]\,, \quad \theta \in]-\pi,\pi\,]$.

6. Seja $\vec{u} = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$. Determine $D_{\vec{u}}g(\pi,-2,1)$ e $D_{\vec{u}}\varphi(0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ sendo g e φ as funções definidas no exercício 4.

7. Considere a função vectorial

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y) & \mapsto & (x+y^2, xy, e^y) \end{array}.$$

   Para $P_0 = (1,0)$ e $\vec{u} = \hat{\imath} - \hat{\jmath}$ calcule $J_f(P_0)$ e $D_{\hat{u}}f(P_0)$.

8. Calcule aproximadamente:

   (a) $\sqrt{\sin^2(1.55) + 8\,e^{1.015}}$;

   (b) $\arctan\left(\dfrac{1.02}{0.95}\right)$;

   (c) $1.02^{4.05}$;

   (d) $\ln\left(0.009^3 + 0.99^3\right)$.

9. Diga, usando o *Teorema de Schwarz–Young*, se existe alguma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = xy^2 + 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y^2$;

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y + x$;

   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = x\sin y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y\sin x$;

   (d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \log(1+y^2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{1+y^2}$

10. Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 4y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 60y^2 + 2\,.$$

11. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & , \ x \neq -y \\ 0 & , \ x = -y \end{cases}$.

   (a) Calcule $f_y(x,0)$ e $f_x(0,y)$;

   (b) Mostre que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Derivada de funções compostas

12. Calcule $\dfrac{du}{dt}$ sendo $u = \ln(\sin \frac{x}{y})$ e $\begin{cases} x &= 3t^2 \\ y &= \sqrt{1+t^2} \end{cases}$.

13. Calcule $\dfrac{dz}{dy}$ sendo $z = f(x^2+y^2, x+y)$ e $x = \phi(y)$.

14. Sendo $u = x^3 F(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, prove que $x\, u_x + y\, u_y + z\, u_z = 3u$.

15. Sendo $z = \dfrac{y^2}{2} + \phi(\frac{1}{x} + \ln\, y)$, prove que $y\, z_y + x^2 z_x = y^2$.

16. Considere a função h definida por $h(x,y) = f(1/(x^2+y^2))$, onde f é uma função real de variável real diferenciável. Se $g(u,v) = h(x(u,v), y(u,v))$ e $x(u,v) = u\cos v$, $y(u,v) = u \sin v$:

    (a) Verifique que $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$; (b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}(1,0)$, sabendo que $f'(1) = 2$.

17. Sejam f e g funções de uma variável de classe C^2. Sendo $c \in \mathbb{Z}^+$, prove que a função $u(x,t) = f(x+c\,t) + g(x-c\,t)$ verifica a seguinte equação (dita *equação de propagação*) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

18. Seja $w(x,y,z) = f(y-z, z-x, x-y)$ com f função real admitindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

    (a) Mostre que $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$; (b) Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$.

19. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^3. Sendo $F(x,y) = \ln(g(2x, y^2))$,

    (a) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de F em função das derivadas parciais de g;

    (b) Sabendo que g e as suas derivadas satisfazem as seguintes relações: $g(0,\beta) = 2\beta$ e $g_{uv}(0,\beta) = g_u(0,\beta) g_v(0,\beta) = \beta$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,1) = 1$.

20. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções reais definidas por:

    (a) $f(x,y) = \int_a^{x+y} g(t)\, dt + \int_a^{xy} g(t)\, dt$; (b) $f(x,y,z) = \int_{x^4}^{\sin(x \sin(y \sin z))} g(t)\, dt$;

    onde g é uma função real de variável real, contínua em $\mathbb{R}$.

21. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 . O *laplaciano* de f é dado por

$$\Delta\, f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exprima o laplaciano de f em coordenadas polares, isto é, sendo

$$x = r\, \cos\theta \;\text{ e }\; y = r\, \sin\theta, \quad r \geq 0\,, \quad \theta \in]-\pi, \pi\,], \quad \text{e} \quad g(r,\theta) = f(r\, \cos\theta, r\, \sin\theta),$$

exprima $\Delta\, f(r\, \cos\theta, r\, \sin\theta)$ em função das derivadas parciais de g.

22. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 . O *laplaciano* de f é dado por

$$\Delta\, f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Exprima o laplaciano de f em coordenadas esféricas, isto é, sendo

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta,\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \ \text{ e } \ z = \rho\cos\phi\,, \quad \rho \geq 0, \quad \phi \in [0,\pi\,],\, \theta \in]-\pi,\pi\,],$$

$$\text{e} \quad g(\rho,\theta,\phi) = f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho\cos\phi),$$

exprima $\Delta\, f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho\cos\phi)$ em função das derivadas parciais de g.

23. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = f(\sin x, \cos y)$. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1$, calcule $J_F\,(0,0)$.

24. Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(0,e,0)$, e $[e \ \ -1 \ \ e]$ a matriz jacobiana de h em $(0,e,0)$. Mostre que a aplicação g definida, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por

$$g(x,y) = h\left(\sin\left(x\,y^2\right), e^y, \ln\left(1+x^2\right)\right),$$

é diferenciável em $(0,1)$ e que

$$\frac{\partial\, g}{\partial\, x}(0,1) + \frac{\partial\, g}{\partial\, y}(0,1) = 0.$$

25. Sejam $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = (e^{xy}, x^2\,y)$ e $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(r,s,t,u) = (r^2+t^2, 2\,s\,u)$. Utilize o teorema da derivada da função composta para concluir que $g \circ f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^4$ e calcular $J_{g\circ f}\,(1,1,1,1)$.

26. Considere as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $f(x,y) = \sin(x^2-y^2)$ e $g(x,y) = (x+y, x-y)$. Calcule as matrizes Jacobianas de f, g e $f \circ g$ no ponto (x,y).

27. Calcule a matriz Jacobiana de $g \circ f$ no ponto (x,y,z), sendo:

$$\begin{array}{rccl} f\ : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y^2, xy^2z) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccl} g\ : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (s,t) & \mapsto & (s^2+t, st, e^t)\,. \end{array}$$

28. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(1) = f\,'(1) = 2$ e $f(2) = f\,'(2) = 1$. Considere as funções $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$h(x,y) = e^{8-x^2+y^3}, \ \ g(x,y,z) = \begin{bmatrix} f\,(x^2) + f\,(x^2+y^2) \\ f^2\,(yz) \end{bmatrix}.$$

Prove que $h \circ g$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e determine a matriz jacobiana de $h \circ g$ em $(1,1,2)$.

29. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que $J_f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e seja F definida por $F(r,\theta,\phi) = f\,(r\,\cos\theta\,\sin\phi, r\,\sin\theta\,\sin\phi, r\,\cos\phi)$.
Calcule $J_F\left(1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

30. Considere a função real f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Prove que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, para qualquer vector não nulo v de $\mathbb{R}^2$ e indique o valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique convenientemente a sua resposta.

(d) Considere a função $g(t) = (3\,t, 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}$.

i. Prove que $f \circ g$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que

$$(f \circ g)\,'(0) = \frac{12}{13}.$$

ii. Mostre que

$$\nabla f(0,0) \cdot g\,'(0) = 0.$$

Explique porque é que este resultado não contraria o teorema da derivada da função composta.

Teorema da função implícita. Teorema da função inversa. Dependência funcional

31. Para que pontos (x_0, y_0) (e nas respectivas vizinhanças), define a equação $y^2 - 2xy = 1$, nas condições do teorema da função implícita,

(a) y como função implícita de x ;

(b) x como função implícita de y .

32. Considere a função F definida em $\mathbb{R}^3$ por $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - x\,y$.

(a) Mostre que a equação $F(x,y,z) = 0$ define z como função implícita de x e y numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$ e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(1,1)$.

(b) Determine, indicando o domínio de definição e a expressão analítica, três funções, $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ e $x = h(y,z)$, definidas implicitamente pela equação $F(x,y,z) = 0$.

(c) Analise as condições do teorema da função implícita em $(0,0,0)$ e diga se é possível explicitar alguma das variáveis em função das restantes, numa vizinhança deste ponto.

33. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Suponha que a equação $f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ define, nas condições do teorema da função implícita, z como função implícita de x e y. Mostre que então $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) = z(x,y)$.

34. Considere a equação $x - z + (y+z)^2 - 6 = 0$.

   (a) Mostre que a equação dada define z como função implícita de x e y numa vizinhança do ponto $(3,-3,1)$.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(3,-3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(3,-3)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(3,-3)$.

35. Considere a equação

$$\log(xyz) + e^{x+2y-ez} = 0\,.$$

   (a) Prove que numa vizinhança de $(1, 1/2, 2/e)$ esta equação define x como função implícita de y e z.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial y}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{e}\right)$ e $\dfrac{\partial^2 x}{\partial z \partial y}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{e}\right)$.

36. Seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\Phi'(1) \neq 0$.

   (a) Mostre que a equação $\Phi(x^2+y^2) - \Phi(2x+z) = 0$ define implicitamente z em função de x e y numa vizinhança do ponto $(1,0,-1)$.

   (b) Averigúe se $(1,0)$ é ponto crítico da função $z = z(x,y)$ definida na alínea anterior.

37. Considere a função F definida em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = 2\,x^2 + 2\,y^2 + z^2 - 8\,x\,y - 2\,z.$$

   (a) Mostre que a equação $F(x,y,z) = -7$ define, nas condições do Teorema da função implícita, uma função $y = h(x,z)$, numa vizinhança do ponto $(2,1,1)$.

   (b) Mostre que $(2,1)$ é um ponto crítico de h e classifique-o.

38. Seja $F(x,y,z) = x^2 - 3\,y\,z^2 + x\,y\,z - 1$.

   (a) Mostre que a equação $F(x,y,z) = 0$ define, nas condições do Teorema da função implícita, z como função g de x e y numa vizinhança de $(1,1,0)$.

   (b) Seja $h(u,v) = g(v^2 - u, 1 - u\,v)$ onde g é a função considerada na alínea anterior. Calcule $h_{uv}(0,1)$.

39. Considere o sistema

$$\begin{cases} x^3 + 2\,y &= 2\,t^3 \\ x - y^2 &= t^2 + 3\,t \end{cases}$$

   (a) Mostre que o sistema dado define, nas condições do teorema da função implícita, x e y como funções de t numa vizinhança de $(x,y,t) = (0,0,0)$.

   (b) Sendo $H(x,y) = \sin(3\,x - y)$ e $g(t) = H(x(t), y(t))$, calcule $g'(0)$.

40. Considere a função F definida em $\mathbb{R}^4$ por

$$F(x,y,u,v) = \left(x^2 + y^2 + x\,v,\, u\,v + x\,y\right).$$

(a) Mostre que a equação $F(x,y,u,v) = (3,1)$ define, nas condições do Teorema da função implícita, uma função $(x,y) = h(u,v)$, numa vizinhança do ponto $(x,y,u,v) = (1,1,0,1)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}(0,1)$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}(0,1)$ e $\dfrac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}(0,1)$.

41. (a) Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 & = & 5 \\ 2\,x^2 + y - z & = & 0 \end{cases}$$

define, nas condições do teorema da função implícita, $y = f(x)$ e $z = g(x)$, numa vizinhança de $(x,y,z) = (0,1,1)$.

(b) Calcule $f\,'(0)$.

(c) Seja h a função real definida por

$$h(s,t) = e^{s-t}\, f\,[s - g(\ln\, t)]$$

onde f e g são as funções referidas na alínea anterior. Calcule $\dfrac{\partial\, h}{\partial\, t}(1,1)$.

42. (a) Prove que o sistema de equações

$$\begin{cases} x^3 + e^x - t^2 - t & = & 1 \\ y\,t^3 + y^2\,t + y - t & = & 0 \end{cases}$$

define implicitamente, nas condições do teorema da função implícita, x e y como funções de t, numa vizinhança de $(x,y,t) = (0,0,0)$.

(b) Sejam $h, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com $J_h\,(0,1) = [0\ \ 0]$ e x e y as funções de t consideradas na alínea anterior. Se $f(t) = g\,(x(t)\,y(t), h\,(x(t),1))$, calcule $f\,'(0)$.

43. Mostre que a função vectorial definida por $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, e^z)$ é invertível numa vizinhança de qualquer ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ e determine a matriz Jacobiana, no ponto $(1,0,1)$, da função g que é a inversa de f numa vizinhança de $(1,0,0)$.

44. Determine os pontos P_0 para os quais o teorema da função inversa garante, numa vizinhança de P_0, a existência de uma inversa local para as seguintes funções:

(a) $f(x,y) = (x^2 + y^2, \sin x)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(b) $\varphi(u,v,w) = e^u(\cos v \sin w\hat{\imath} + \sin v \sin w\hat{\jmath} + \cos w\hat{k})\,, \quad (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$;

45. Seja h a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$h(x,y) = \left(x^2 + 2\,x\,y, 2\,x + 2\,y\right).$$

(a) Determine para que pontos P_0 a função h é, pelo teorema da função inversa, localmente invertível numa vizinhança de P_0.

(b) Inverta localmente a restrição da função h a $B = B\,((2,1), r)$.

46. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = \left(x^3, y\right)$.

   (a) Mostre que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e que $det\, J_f\,(0,0) = 0$.

   (b) Mostre que f é bijectiva e defina f^{-1}.

47. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Mostre que F é localmente invertível numa vizinhança de (a,b), para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, mas não admite inversa (global) em $\mathbb{R}^2$.

48. Considere a função vectorial $f = (f_1, f_2)$ definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por $f_1(x,y) = 2x/(x^2+y^2)$ e $f_2(x,y) = -2y/(x^2+y^2)$.

   (a) Mostre que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e que $detJ_f\,(x,y) \neq 0,\;\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (b) Averigúe se f admite inversa e, em caso afirmativo, determine-a.

49. Seja $(u,v) = f(x,y)$ com $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \left(e^{x\,y}, x+y\right).$$

   (a) Mostre que f é localmente invertível numa vizinhança de $(1,2)$.

   (b) Calcule $detJ_{f^{-1}}\,(f(1,2))$.

50. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y^2 - u^3 + v &= 0 \\ x^2 - y + u - v^2 &= 0 \end{cases}$$

   (a) Mostre que o sistema define, nas condições de Teorema da função implícita, (u,v) como função φ de (x,y), numa vizinhança de $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (0,0,0,0)$.

   (b) Calcule a matriz Jacobiana da função φ, definida na alínea anterior, no ponto $(0,0)$.

   (c) Sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$g(u,v) = (v\,\cos u, u\,\sin v)\,,$$

   calcule $J_{g\circ\varphi}\,(0,0)$.

   (d) Justifique que φ é localmente invertível numa vizinhança de $(0,0)$ e calcule $detJ_{\varphi^{-1}}\,(0,0)$.

51. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} e^{x-u} + y\,v + 3 &= 0 \\ e^{y+v} - x\,u &= 0 \end{cases}$$

   (a) Mostre que o sistema define, nas condições de Teorema da função implícita, (u,v) como função g de (x,y), numa vizinhança de $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (1,2,1,-2)$.

   (b) Calcule a matriz Jacobiana da função g, definida na alínea anterior, no ponto $(1,2)$.

   (c) Justifique que g é localmente invertível numa vizinhança de $(1,2)$ e calcule $detJ_{g^{-1}}\,(1,-2)$.

52. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $F(x, y) = (y + e^{xy},\, x - e^{xy})$.

   (a) Mostre que F é localmente invertível numa vizinhança de $(0, 0)$ e calcule $J_{F^{-1}}(1, -1)$.

   (b) Seja G a função definida por $G(u, v) = (u + \ln|\,v\,|, v + \ln|\,u\,|)$.

      i. Determine o domínio de G.

      ii. Calcule $J_{G\circ F}(0, 0)$ e $J_{F^{-1}\circ G}(1, -1)$.

53. Sejam f uma função real continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$ verificando:

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = f\,,$$

e ϕ uma função vectorial de $\mathbb{R}^2$ definida em $\mathbb{R}^2$ por $\phi(\theta, \rho) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Mostre que:

   (a) A função $F = f \circ \phi$ verifica a equação $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = F$.

   (b) $F(\theta, \rho) = g(\rho)\exp\theta$, para uma qualquer função, g, real de variável real continuamente diferenciável.

   (c) A função inversa de ϕ, ϕ^{-1}, está definida por $\phi^{-1}(x, y) = (\arctan(y/x), \sqrt{x^2 + y^2})$.

   (d) Conclua que $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})\exp(\arctan(y/x))$.

54. Mostre que as funções

$$f_1(x, y) = e^{2\,x-y}\,, \quad f_2(x, y) = e^{2\,y-4\,x}$$

são funcionalmente dependentes em $\mathbb{R}^2$. Sendo $f = (f_1, f_2)$, determine $f(\mathbb{R}^2)$.

55. Verifique que são funcionalmente dependentes em $\mathbb{R}^2$, as funções

$$f(x, y) = 2xy + 2x + 1\,, \quad g(x, y) = x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 1$$

e que estão ligadas pela relação

$$f^2 - 2f - \lambda g + \nu = 0$$

com λ e ν constantes a determinar.

56. Determinar a constante $\lambda \in \mathbb{R}$ que torna as funções

$$f_1(x, y, z) = x + y - z\,, \quad f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2\,, \quad f_3(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^3 + \lambda xyz$$

funcionalmente dependentes.

57. Verifique se as funções

$$f_1(x, y) = \frac{x}{y}\,, \quad f_2(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

são funcionalmente dependentes. Determine o domínio A de definição de $f = (f_1, f_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e identifique $f(A)$.

Curvas e superfícies

58. Faça um esboço da curva definida por:

    (a) $\vec{r}(t) = 4t\hat{\imath} + 2\cos t\hat{\jmath} + 3\sin t\hat{k}$, $t \in [0\,,\,\pi]$;

    (b) $\vec{r}(t) = 4\,t\hat{\imath} + 2\cos t\hat{\jmath} + 3\sin t\hat{k}$, $t \in [0\,,\,2\pi]$;

    (c) $\vec{r}(t) = (3\exp(-2t) - 1, \exp(-t))$, $t \in \mathbb{R}$;

    (d) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}\sin t\hat{\imath} + \sqrt{2}\sin t\hat{\jmath} + 2\cos t\hat{k}$, $t \in [0\,,\,2\pi]$.

59. Determine equações cartesianas de cada uma das curvas consideradas no exercício anterior.

60. Determine uma parametrização da curva C definida por:

    (a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } y = x\}$;

    (b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1 \text{ e } y = 2x\}$;

    (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } z = 1\}$.

61. Determine uma equação da recta tangente à curva C no ponto P_0 indicado:

    (a) $C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \\ z = t \end{cases}$, $\quad t \in [0, 2\pi]$; $\quad P_0 = (-1, 0, \pi)$;

    (b) $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = 2 \\ z = -t^3 \end{cases}$, $\quad t \in [0, 2]$; $\quad P_0 = (1, 2, -1)$.

62. Considere as curvas Γ_1 e Γ_2 definidas por:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &: \ \vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + \sin t\hat{k} \\ \Gamma_2 &: \ x^3 + 2xy - 3y^2 = 0\,,\ y > 0 \end{aligned}$$

    Determine as equações da recta tangente e do plano / recta normal às curvas Γ_1 e Γ_2 nos pontos $t = \frac{\pi}{4}$ e $(1, 1)$ respectivamente.

63. Determine as equações da recta tangente e do plano normal à curva $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ no ponto $P_0 = (-2, 1, 6)$.

64. Identifique e escreva uma equação cartesiana da superfície de equação vectorial:

    (a) $\vec{r}(u, v) = (1 + 2u)\,\hat{\imath} + (-u + 3v)\,\hat{\jmath} + (2 + 4u + 5v)\,\hat{\kappa}$;

    (b) $\vec{r}(u, v) = u\,\cos v\,\hat{\imath} + u\,\sin v\,\hat{\jmath} + u^2\,\hat{\kappa}$;

    (c) $\vec{r}(u, v) = u\,\hat{\imath} + u\,\cos v\,\hat{\jmath} + u\,\sin v\,\hat{\kappa}$;

    (d) $\vec{r}(u, v) = u\,\hat{\imath} + \cos v\,\hat{\jmath} + \sin v\,\hat{\kappa}$.

65. Determine uma representação paramétrica para o plano que passa pelo ponto $(1, 2, -3)$ e contém os vectores $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{\kappa}$ e $\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{\kappa}$.

66. Determine uma representação paramétrica para a porção de superfície de equação $-x^2-y^2+z^2 = 1$, com $(x, y) \in [-1, 1] \times [-3, 3]$.

67. Considere a superfície parametrizada por

$$\vec{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, \frac{1}{v^2}) \, , \quad 0 \leq u < 2\pi, \quad v > 0$$

   (a) Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície no ponto $P_0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$;

   (b) Represente geometricamente a superfície dada.

68. Considere a superfície S parametrizada por

$$S : \vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \, , \; (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

   (a) Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície S no ponto $P_0 = (1, 1, 2)$;

   (b) Represente geometricamente a superfície dada.

69. Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície S definida por

$$S : \vec{r}(u, v) = (u - v, u^2 + v^2, uv) \, , \; (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

   no ponto P_0 tal que $\vec{OP_0} = \vec{r}(1, 1)$.

70. Determine uma equação do plano tangente às seguintes superfícies nos pontos indicados:

   (a) $z = x^2 + y^2$ no ponto $P_0 = (1, -2, 5)$;

   (b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3$ no ponto $P_0 = (0, 1, -1)$;

   (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$ no ponto $P_0 = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$ com $r > 0$;

   (d) $x^2 + y^2 = 25$ no ponto $P_0 = (3, 4, 2)$.

71. Mostre que as superfícies de equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = z^2 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 90$$

   são tangentes nos pontos $(0, 3, 1)$ e $(0, -3, 1)$.

72. Prove que toda a recta normal a uma esfera passa pelo seu centro.

73. Considere a superfície S definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2x = 0\}$. Determine os pontos de S nos quais o plano tangente é paralelo a um dos planos coordenados.

74. Determine os planos tangentes à superfície de equação $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 11$ paralelos ao plano de equação $x + y + z = 1$.

75. Em que ponto do eplipsoide $x^2/4 + y^2/4 + z^2 = 1$ a normal forma ângulos iguais com os eixos coordenados.

76. Seja f uma função diferenciável e S a superfície de equação $z = y\, f(\frac{x}{y})$.

    (a) Mostre que S admite plano tangente em cada um dos seus pontos.

    (b) Mostre que todos os planos tangentes a S passam em $(0, 0, 0)$.

77. Seja $G(u, v, w)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$G(0,1,1) = 0\,, \quad \frac{\partial G}{\partial u}(0,1,1) = -2\,, \quad \frac{\partial G}{\partial v}(0,1,1) = 2 \ \text{ e } \ \frac{\partial G}{\partial w}(0,1,1) = -1\,.$$

    Considere a função definida por $F(x, y, z) = G(xy, x + y, z^2)$.

    (a) Determine $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ em função das derivadas parciais de G.

    (b) Seja S a superfície de equação $F(x, y, z) = 0$. Determine uma equação do plano tangente a S no ponto $(1, 0, -1)$.

78. Seja $\phi(u, v, w)$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e tal que

$$\phi_w(u, v, w) = 2\phi_v(u, v, w) \neq 0\,, \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3\,,$$

$$\phi(1, 1, 0) = 0\,, \quad \phi_v(1, 1, 0) = -1 \quad \text{e} \quad \phi_u(1, 1, 0) = -2\,.$$

    Considere a superfície S de equação $\phi(x + 2y, 2z^2, 2xy) = 0$.

    (a) Mostre que, numa vizinhança de $(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, S é o gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$.

    (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$.

    (c) Determine uma equação do plano tangente a S no ponto $(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

79. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 verificando

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3f(x, y)\,, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

    e considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(u, v) = f\left((u + v)^2, (u - v)^2\right)$.

    (a) Mostre que $u\dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v) + v\dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v) = 6F(u, v)\,, \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$.

    (b) Suponha que $F(1, 1) = 0$. Mostre que a superfície de $\mathbb{R}^3$ de equação $w = F(u, v)$ admite plano tangente no ponto $(u_0, v_0, w_0) = (1, 1, 0)$ e que este passa na origem.