Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
Cálculo III - Engenharia Electrotécnica
Caderno de Exercícios

Cálculo Integral

Cálculo do integral triplo em coordenadas cartesianas.

(1) Calcule os seguintes integrais triplos:

(a) $\iiint_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ : x+y+z \leq 1\}$;

(b) $\iiint_D y\, dxdydz$ onde D é limitado pelas superfícies de equações $y = x^2 + z^2$ e $y = \sqrt{20 - x^2 - z^2}$;

(c) $\iiint_D (x+y)^2\, dV$ onde $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4z \geq x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 12\}$;

(d) $\iiint_D z^2\, dV$ onde $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 6z\}$.

(2) Em cada um dos seguintes exercícios identifique o domínio de integração, escreva, se possível, os integrais dados por uma ordem de integração diferente e calcule-os.

(a) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (xy + xyz)\, dz\, dx\, dy$;

(b) $\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{2}} x\, dz\, dy\, dx$;

(c) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{2+x^2+y^2} dz\, dy\, dx$;

(d) $\int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy\, dz\, dx$.

Mudança de variável no integral triplo.

(3) Usando uma mudança de variável conveniente calcule os seguintes integrais triplos:

(a) $\iiint_D \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$;

(b) $\iiint_D \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$;

(c) $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1\}$.

(d) $\iiint_D y\, dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge z \geq -\sqrt{x^2+y^2}\}$;

(e) $\iiint_D z\, dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 2z - x^2 - y^2\}$;

(f) $\iiint_D \sqrt{1 - (\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9})}\, dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 \leq 36\}$;

(g) $\iiint_D ((y+z)^2 - x^2)\, dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x+y+z \leq 1$ e $-2 \leq -x+y+z \leq 4$ e $-2 \leq 3x+z \leq 3\}$.

(4) Considere o integral triplo I escrito na seguinte forma

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2-1}^{2-rcos\theta} 4r^2 \sin\theta\, dz\, dr\, d\theta\,.$$

(a) Represente graficamente o domínio E de integração;

(b) Calcule o valor de I;

(c) Escreva I como um integral iterado usando coordenadas cartesianas.

Cálculo de volumes usando integrais triplos.

(5) Usando integrais triplos, calcule o volume das regiões de $\mathbb{R}^3$ definidas por:
(a) $x^2+y^2+z^2 \le r^2$, $r>0$;
(b) $x^2+y^2 \le 1\,,\ -1 \le z \le 1$;
(c) $x^2+y^2 \le (z-1)^2\,,\ 0 \le z \le 1$;
(d) $0 \le z \le 2$, $x^2+y^2-z^2 \le 1$;
(e) $x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$;
(f) $x^2+y^2+z^2 \le 8\,,\ z^2 \ge x^2+y^2$;
(g) $x^2+y^2+z^2 \le 4\,,\ x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4$;
(h) $x^2+y^2+z^2 \le 2z$, $x^2+y^2+z^2 \le 3$, $y \ge x$.

(6) Seja $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1+\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$.
(a) Calcule o volume de Q;
(b) Calcule o volume de $T(Q)$, onde $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é definida por $T(x,y,z) = (x-y, y+z, z-x)$.

Integral curvilíneo de funções escalares.

(7) Calcule o $\displaystyle\int_C f(x,y,z)\, ds$, onde:
(a) $f(x,y,z) = x+y+z$ e C é a curva de equações paramétricas $x=\sin t\,,\ y=\cos t\,,\ z=t$, $t\in[0,2\pi]$;
(b) $f(x,y,z) = x\cos z$ e C é a curva de equações paramétricas $x=t\,,\ y=t^2\,,\ z=0$, $t\in[0,1]$.

(8) Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e C uma curva seccionalmente regular contida em D, de representação paramétrica $\vec{r}(t)$, $t\in[a,b]$. Sendo $-C$ a curva formada pelos mesmos pontos de C, mas percorrida em sentido contrário, prove que $\displaystyle\int_{-C} f\, ds = \int_C f\, ds$.

(9) Calcule:
(a) $\displaystyle\int_C \frac{1}{x-y}\, ds$, em que C é o segmento de recta de equação $y=\frac{1}{2}x-2$, compreendido entre os pontos $A(0,-2)$ e $B(4,0)$;
(b) $\displaystyle\int_C x-y\, ds$, onde $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (y=x^2 \vee y=4) \wedge |x|\le 2\}$.

(10) Sejam C_1 e C_2 as curvas de equações paramétricas $x=\cos t\,,\ y=\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, e $x=\cos 4t\,,\ y=\sin 4t$, $t\in[0,2\pi]$, respectivamente. Faça um esboço das curvas C_1 e C_2 e calcule o comprimento de cada uma delas.

(11) Pretendem-se caiar ambos os lados de uma cerca que tem por base a curva

$$C = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x/30)^{2/3} + (y/30)^{2/3} = 1 \text{ e } y \ge 0\right\}$$

e em que a altura é dada em cada ponto $(x,y)\in C$ por $a(x,y) = 1+y/3$. Desprezando os encargos com a cal, e sabendo que o pintor leva 1000\$00 por caiar 25 u.a., determine o preço a que fica o trabalho.

Integral curvilíneo de campos de vectores.

(12) Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ onde
(a) $\vec{F}(x,y) = (x^2-y^2)\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ e C é o arco da circunferência de equação $x^2+y^2=4$, orientada no sentido directo, que vai de $A(0,2)$ a $B(2,0)$;
(b) $\vec{F}(x,y,z) = (y+z)\hat{\imath} + (x+z)\hat{\jmath} + (x+y)\hat{k}$ e C é o arco da curva de equação $y=x^2\,,\ z=x^4$ que une os pontos $A(0,0,0)$ e $B(1,1,1)$ e orientada de A para B;

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (2x-z)\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k}$ e C é a curva que se obtem por justaposição do segmento de recta de extremos $(0,0,0)$ e $(1,0,0)$ com a curva parametrizada por $x = \cos t\,,\ y = \sin t\,,\ z = t/\pi,\ t \in [0\,,\,\pi]$;

(d) $\vec{F}(x,y,z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ e C é a curva definida pela condições $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e está orientada no sentido directo.

(13) Calcule os seguintes integrais curvilíneos:

(a) $\displaystyle\int_C (y - \sin x)\,dx + \cos x\,dy$, onde C é o triângulo de vértices $P(0,0)$, $Q(\pi/2,0)$ e $R(\pi/2,1)$, orientado no sentido positivo;

(b) $\displaystyle\int_C (y+1)\,dx - x^2\,dy$, onde $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x^2 \vee y = 4) \wedge x \in [-2,2]\}$ está orientada no sentido directo.

(14) Sendo $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 \text{ e } x^2+y^2 \geq 1\}$ e C a curva fechada definida pela intersecção de Q com o plano $z = 1$ e orientada no sentido directo, calcule $\displaystyle\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz$.

(15) Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} - z\hat{k}$, no deslocamento ao longo da curva C definida por: $z = y^4\,,\ x = 1$ desde $(1,0,0)$ a $(1,1,1)$.

(16) Considere as duas superfícies de equações $S_1 : x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ e $S_2 : z = \sqrt{3}$, e seja Γ a linha de intersecção de S_1 com S_2. Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{G}(x,y,z) = -y^2\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + (z^2+1)\hat{k}$, para deslocar uma partícula material ao longo da curva Γ, orientada no sentido directo.

(17) Calcule $\displaystyle\int_C e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy$, onde C é uma curva entre o ponto $P(0,0)$, e o ponto $Q(\pi/2,\pi/2)$.

(18) Calcule $\displaystyle\int_C (y - x^2)\,dx + x\,dy$, onde $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 2x - x^2 \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (x + 3y = 4 \wedge 1 \leq x \leq 4)\}$ e está orientada no sentido directo.

(19) Calcule o integral $\displaystyle\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ onde C é uma curva simples, fechada e parcialmente suave, que não intersecta o eixo das abcissas.

Teorema de Green.

(20) Por aplicação do Teorema de Green, calcule o integral $\displaystyle\int_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy$, onde C é a circunferência de equação $x^2+y^2 = r^2$, orientada no sentido directo.

(21) Sendo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2 \text{ e } x \leq y^2/2 + 2\}$, use o Teorema de Green para calcular o integral $\displaystyle\iint_R y^2\,dxdy$.

(22) Seja $K = \displaystyle\int_C y\,dx + e^y y^2\,dy$ onde C é a fronteira, orientada no sentido directo, da região plana R determinada pelas condições $x \leq 2$ e $y^2 \leq 2(x+2)$. Apresente o valor da área de R em função de K.

(23) Seja Γ a curva que se obtém por justaposição da curva definida por $x^2+y^2 = 4$ e $x \geq 0$ e $y \geq 0$, orientada de $A(0,2)$ para $B(2,0)$, com a curva definida parametricamente por $x = 2 - 2t\,,\ y = 4t^2 - 8t,\ t \in [0,1]$. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma e^{x^2}\,dx + (1+y^2)\,dy$.

(24) Considere a região plana $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x \text{ e } x^2+y^2 \leq -2x\}$.

(a) Calcule o valor da constante k dada por $k = \displaystyle\iint_R y\,dA$.

(b) Sendo C a curva com orientação positiva, que é fronteira da região R, mostre que

$$\int_C (x+2y^2)\,dx + (xy+y^2)\,dy = -3k\,.$$

(25) Considere a região plana $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1-(x+1)^2\}$ e a curva C que é a fronteira de R orientada positivamente.

(a) Calcule, usando a definição, $\int_C -x^2\,dy - y^2\,dx$.

(b) Use o resultado anterior para determinar o volume do sólido $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R \text{ e } 0 \leq z \leq y-x\}$.

(26) Recorrendo ao Teorema de Green, determine as equações das superfícies que definem a fronteira do sólido cujo volume é dado por $\int_C (y^3+2yx^2)\,dx + (2x+y^2x)\,dy$, onde C representa a circunferência de equação $x^2+y^2=1$, percorrida no sentido directo.

(27) Seja $\vec{F}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}$.

(a) Prove que $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ tem sempre o mesmo valor, qualquer que seja a curva C fechada, simples, seccionalmente suave e orientada positivamente que circunda a origem. Calcule esse valor.

(b) Prove ainda que, se a curva C não circundar nem passar na origem, então $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$.

Integral de superfície de funções escalares.

(28) Calcule os seguintes integrais de superfície

(a) $\iint_S z^2\,dS$, onde S é a porção da superfície cónica $z=\sqrt{x^2+y^2}$, limitada pelos planos $z=1$ e $z=3$;

(b) $\iint_S z\,dS$, onde S é o elipsóide de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

(c) $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, onde S é a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=a^2$;

(d) $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, onde S é a reunião da porção do parabolóide $z=1-(x^2+y^2)$, situada acima do plano XOY, com a porção desse mesmo plano definida por $x^2+y^2\leq 1$;

(e) $\iint_S x\,dS$, onde $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=2x \text{ e } 0\leq z\leq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

(29) Calcule o integral de $f(x,y,z)=xyz$ sobre o rectângulo de vértices $(1,0,1)$, $(2,0,0)$, $(1,1,1)$ e $(2,1,0)$.

(30) Considere a superfície S definida por $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=4 \text{ e } 0\leq z\leq x+3\}$. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\iint_S x^2\,dS$; (b) $\iint_S y^2\,dS$; (c) $\iint_S z^2\,dS$.

(31) Calcule a área de superfície de S quando:

(a) S é um cubo de aresta igual a $a>0$;

(b) S é uma superfície esférica de raio igual a $a>0$;

(c) S é composta pela porção do parabolóide $x^2+y^2=4-z$, situada acima do plano XOY, e pela porção da superfície esférica $x^2+y^2+z^2=4$ situada abaixo desse mesmo plano;

(d) S é a superfície que limita o sólido Q definido por $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - (z-6)^2 \leq 0 \text{ e } 0 \leq z \leq 6\}$.

Integral de superfície de campos vectoriais.

(32) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$ quando:

(a) $\vec{F}(x, y, z) = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath} + 8\hat{k}$ e S é a porção do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que fica situada acima do plano XOY, com $\hat{n}$ dirigida para cima;

(b) $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2x^2\hat{k}$, sendo S a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$, limitada pelas superfícies $x = 1 - y^2$ e $x = y^2 - 1$, orientada com a normal $\hat{n}$ dirigida para baixo;

(c) $\vec{F}(x, y, z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z^4\hat{k}$ e S é a superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, orientada com a normal $\hat{n}$ dirigida para dentro;

(d) $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + yz\hat{k}$, S é definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq h\}$ com $r > 0\,,\ h > 0$, e orientada com $\hat{n}$ a apontar para o exterior.

(33) Seja $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + yz\hat{k}$ o campo vectorial que representa a velocidade (em m/s) de uma corrente de fluido. Determine quantos metros cúbicos de fluido atravessam, por segundo, o plano XOY através do quadrado definido por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

Teorema de Stokes e Teorema da Divergência.

(34) Usando o Teorema de Stokes, transforme o integral de superfície $\iint_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$ num integral curvilíneo e calcule o seu valor, para cada um dos casos seguintes.

(a) $\vec{F}(x, y, z) = 2y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ e S é a superfície do parabolóide $z = 1 - (x^2 + y^2)$, situada acima do plano XOY, com a orientação canónica.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = y^2\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + xz\hat{k}$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\}$, com a orientação canónica.

(c) $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{\imath} - y\hat{\jmath} - x^2y\hat{k}$, S é composta pelas 3 faces, não situadas no plano XOZ, do tetraedro limitado pelos 3 planos coordenados e pelo plano $3x+y+3z = 6$, com orientação determinada pela normal unitária exterior do tetraedro.

(35) Usando o Teorema de Stokes, mostre que cada um dos seguintes integrais curvilíneos tem o valor indicado. Em cada caso diga em que sentido é que é percorrida a curva C para obter o resultado pretendido.

(a) $\oint_C (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - zx)\, dy + (z^2 - xy)\, dz = 0$, com C uma curva simples, fechada e parcialmente suave.

(b) $\oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = -\pi$, sendo C a circunferência $x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0$.

(c) $\oint_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = \pi\sqrt{3}$, sendo C a curva de intersecção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 0$.

(d) $\oint_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz = 0$, sendo C a curva de intersecção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$.

(36) Utilizando o Teorema da Divergência, calcule:

(a) $\displaystyle\iint_S (yz\cos\alpha + xz\cos\beta + xy\cos\gamma)\, dS$ onde S é composta pelas faces do tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 3$, e $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são os cossenos directores da normal unitária exterior a S;

(b) $\displaystyle\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS$ onde $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são os cossenos directores da normal unitária exterior a S e

(i) S é composta pelas faces do cubo de vértices $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$, $(a, a, 0)$ e (a, a, a), com $a > 0$;

(ii) S é a superfície que limita o sólido $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$;

(iii) S é a superfície que limita o sólido $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x^2 + y^2) \leq z^2 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}$.

(37) Considere o sólido V definido por $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \text{ e } z \geq 3\}$. A superfície S que limita V é composta por uma superfície esférica S_1 e por outra plana S_2. Sendo $\hat{n} = \cos\alpha\,\hat{\imath} + \cos\beta\,\hat{\jmath} + cos\gamma\,\hat{k}$ a normal unitária exterior a S, calcule o valor de $\displaystyle\iint_S (xz\cos\alpha + yz\cos\beta + \cos\gamma)\, dS$:

(a) utilizando a definição; (b) usando o teorema da divergência.

(38) Seja $\vec{F}(x, y, z) = (x - 1)\,\hat{\imath} - y\,\hat{\jmath}$ e S a superfície definida por $z = 4 - y^2$ e $x^2 + y^2 \leq 1$.

(a) Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ supondo S com a orientação canónica;

(b) Use a alínea anterior para calcular $\displaystyle\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ com $\vec{G}(x, y, z) = x^2\,\hat{\imath} + z\,\hat{\jmath} + xy\,\hat{k}$ e C a curva definida por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 4 - y^2$ para ambas as orientações possíveis para C.

(39) Seja S a fronteira da região Q de $\mathbb{R}^3$ definida por $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z \leq 6 - x^2 - y^2 \text{ e } 0 \leq z\}$. Seja ainda $\vec{F}(x, y, z) = \exp(xyz)\sin x\,\hat{\imath} + \cos(x + y + z)\exp(x^2/2)\,\hat{\jmath} + \sin(\exp(x^2 + y^2 + z))\,\hat{k}$. Determine $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$ sendo $\hat{n}$ a normal unitária exterior a S.

(40) (a) Calcule o volume do sólido Q determinado por $2z \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ e $x^2 + y^2 \leq z^2$;

(b) Seja $\vec{F}(x, y, z) = (2x + y^2)\,\hat{\imath} + (3y + z^3)\,\hat{\jmath} + (4z + \exp(x^4))\,\hat{k}$ e sejam ainda S a fronteira do sólido Q e $\hat{n}$ a normal unitária exterior a S. Recorrendo ao resultado obtido na alínea anterior, determine o valor de $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$.

(41) Seja S a fronteira da região D definida por $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$, e suponha S orientada pela normal unitária exterior. Seja ainda $\vec{F}(x, y, z) = (\exp(yz)\sin^2 z + x)\,\hat{\imath} + (\exp(\sin x) - 3y)\,\hat{\jmath} + (z^2 + 2z + x\sin y\exp(xy)\,\hat{k}$.

(a) Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$; (b)Calcule $\displaystyle\iint_S 3\operatorname{rot}\vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$.

Exercícios de Exame

(42) Seja C uma curva do espaço, seccionalmente suave, com ponto inicial $(0, 0, c)$ e ponto final $(2, 2, c)$. Calcule $\displaystyle\int_C (x^3 + y)\, dx + (y^4 + x)\, dy + \exp(-z)\, dz$.

(43) Seja Q o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 4 \text{ e } z \geq 0\}$.

(a) Faça um esboço de Q e calcule o seu volume.

(b) Seja S a porção de superfície esférica que limita Q, orientada pela normal unitária $\hat{n}$ que em cada ponto aponta para o exterior de Q. Sendo $\vec{F}(x,y,z) = 3x(x+2)\,\hat{\imath} - (6x+4)y\,\hat{\jmath} + 9\,\hat{k}$, calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$, em função do volume de Q.

(44) Calcule $\int_C xy\ dx\ +\ x^2\ dy$ e diga, justificando, se o campo de vectores $\vec{G}(x,y) = xy\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath}$ é conservativo.

(45) Considere a região de $\mathbb{R}^3$, $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2z \le x^2+y^2+z^2 \le 4z\}$. Descreva a região E em coordenadas esféricas e utilize esse resultado para calcular o volume de E.

(46) Considere a região de $\mathbb{R}^3$ definida por $Q = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -2+x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$.

(a) Faça um esboço de Q e mostre que $\iiint_Q xy\ dxdydz = 0$.

(b) Considere o campo de vectores de $\mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F}(x,y,z) = (x+2x^2y)\,\hat{\imath} - xy^2\,\hat{\jmath} - z\,\hat{k}$. Seja S_1 a porção de superfície cónica que delimita Q e S_2 a porção de parabolóide que delimita Q, ambas com a orientação canónica. Mostre que $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

(47) Considere a região de $\mathbb{R}^3$ dada por $Q = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4\,,\ x^2+y^2 \le z^2 \le 3x^2+3y^2 \ \text{ e } \ y \ge 0\}$. Faça um esboço da região Q, descreva-a em coordenadas esféricas e utilize esse resultado para calcular o seu volume.

(48) Seja C a curva do espaço definida por $x^2+(y-1)^2 = 1\ \ z = 9-x^2-y^2$ orientada no sentido directo.

(a) Parametrize C e calcule o valor da constante k dada por

$$k = \int_C (e^x+y)\,dx\ -\ xy\,dy\ +\ yz\,dz\,.$$

(b) Considere a superfície S de $\mathbb{R}^3$ definida por $z = 9-x^2-y^2\,,\ x^2+(y-1)^2 \le 1$, com a orientação canónica. Use o resultado da alínea anterior para calcular

$$\iint_S (z\,\hat{\imath} + (-y-1)\,\hat{k})\cdot\ d\vec{S}\ ,$$

em função de k.

Exercícios de Revisão

(49) Seja f uma função real definida em $\mathbb{R}$ por $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \ne (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

(a) Verifique se f é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Calcule as derivadas parcias de primeira ordem de f em $(0,0)$.

(c) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$.

(d) Calcule a derivada direccional de f em $(0,0)$, e conclua que f não é diferenciável em $(0,0)$.

(50) Considere a seguinte equação diferencial com derivadas parciais verificada por uma função real de duas varáveis reais de classe C^2, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

(a) Sendo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x, y) = (x + y\,,\, x - y)$, mostre que ϕ é injectiva e determine ϕ^{-1}.

(b) Mostre que $F(u, v) = f \circ \phi(u, v)$ verifica $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$.

(c) Mostre que existem funções $g\,,\, h \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $F(u, v) = g(u) + h(v)$.

(d) Determine a solução geral da equação dada.

(51) Determine os extremos relativos da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sugeitas à condição $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 1$ e $x + 2y - 3z = 0$. Para tal proceda do seguinte modo:

(a) Dê condições necessárias para a existência de extremo e calcule os candidatos a solução do problema.

(b) Dê condições suficientes de extremo do problema dado, em termos das derivadas de segunda ordem. Faça o estudo correspondente.

(c) Dê uma interpretação geométrica do problema. Para tal, explique o significado de extremar a função f e identifique as superfícies de $\mathbb{R}^3$ dadas.

(d) Diga justificando se os candidatos a extremo local obtidos na alínea (a) são extremos globais de f sobre a curva dada.

(52) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\vec{j} + e^{-z}\vec{k}$. Calcule o $\displaystyle\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy + e^{-z} dz$, quando:

(a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\,,\, z = e\}$.

(b) C é uma qualquer curva fechada, simples, parcialmente suave no plano $z = e$, que contém o ponto (0, 0,e) no seu interior geométrico. Que pode dizer se C for uma qualquer curva no espaço que não contiver nenhum ponto do eixo OZ no seu interior geométrico.

(53) Considere os pontos $P = (1, 0, 1)$, $Q = (2, 0, 0)$, $R = (1, 1, 1)$ e $S = (2, 1, 0)$.

(a) Identifique geometricamente o rectângulo de vértices nos pontos P, Q, R, S, e escreva a equações paramétricas e cartesianas do plano que passa por estes pontos. Dê um vector normal a esse plano.

(b) Calcule o integral de arco de superfície de $f(x, y, z) = xyz$, sobre o rectângulo de vértices P, Q, R, S.