Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
Cálculo III - Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Caderno de Exercícios

Equações com Derivadas Parciais.

Campo de direcções e curvas integrais.

(1) Determine o campo de direcções correspondente à família de curvas:

(a) $y = ax^2\,,\ x + y + z = b\,,\ a, b \in \mathbb{R}\,;$

(b) $x - y - 2z = a,\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\ a, b \in \mathbb{R};$

(c) $z = ax^2,\ z^2 = bxy,\ a, b \in \mathbb{R};$

(d) Para as quais as superfícies equipotenciais são dadas por

$$x^2 + y^2 + cy = 1\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

(2) Considere a família de superfícies de equação $f(x, y, z) = c$, onde $f \in \mathrm{C}^1$. Determine o campo de direcções associado à família de curvas ortogonais a esta família de superfícies em cada um dos seus pontos.

(3) Determine as curvas integrais dos seguintes campos de vectores definidos em domínios de $\mathbb{R}^3$:

(a) $F(x, y, z) = (1, 0, 0);$

(b) $F(x, y, z) = (x, y, z);$

(c) $F(x, y, z) = (y, -x, 0);$

(d) $F(x, y, z) = (xyz, (x + y)/z, \exp(x + y + z)).$

(4) Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{xy(z^2+1)};$

(b) $\dfrac{y\,\mathrm{d}\,x}{y^2+z^2} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{xz} = -\dfrac{\mathrm{d}\,z}{xy};$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{y+z} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{x-y};$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x(y-z)} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{y(z-x)} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{z(x-y)}.$

(5) Determine as soluções integrais dos seguintes campos de direções que passam pelas curvas, C, indicadas:

(a) $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e $C: y = x + 1\,,\ z = x^2,\ x \in \mathbb{R};$

(b) $F(x, y, z) = (x, -y, 0)$ e $C: x = t\,,\ y = t\,,\ z = t^2,\ t > 0.$

Equações com derivadas parciais de primeira ordem.

(6) Determine a solução geral das seguintes equações com derivadas parciais lineares:

(a) $\dfrac{\partial\,u}{\partial\,x} = 0;$

(b) $y\dfrac{\partial\,u}{\partial\,x} - x\dfrac{\partial\,u}{\partial\,y} = 0;$

(c) $x\dfrac{\partial\,u}{\partial\,x} + y\dfrac{\partial\,u}{\partial\,y} + xy(z^2+1)\dfrac{\partial\,u}{\partial\,z} = 0;$

(d) $\dfrac{y^2+z^2}{y}\dfrac{\partial\,u}{\partial\,x} + xz\dfrac{\partial\,u}{\partial\,y} - xy\dfrac{\partial\,u}{\partial\,z} = 0;$

(e) $\dfrac{\partial\,u}{\partial\,y} + 3y^2\dfrac{\partial\,u}{\partial\,z} = 0;$

(f) $x^2\dfrac{\partial\,u}{\partial\,x} + y^2\dfrac{\partial\,u}{\partial\,y} + z(x+y)\dfrac{\partial\,u}{\partial\,z} = 0;$

(g) $(y+z)\dfrac{\partial\,u}{\partial\,x} + y\dfrac{\partial\,u}{\partial\,y} + (x-y)\dfrac{\partial\,u}{\partial\,z} = 0;$

(h) $x(y-z)\dfrac{\partial\,u}{\partial\,x} + (z-x)y\dfrac{\partial\,u}{\partial\,y} + z(x-y)\dfrac{\partial\,u}{\partial\,z} = 0;$

(7) Mostre que a solução geral da equação

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$$

vem dada por $z(x,y)=x^n f(y/x)$ onde f é uma qualquer função de classe C^1.

(8) Determine a solução geral das seguintes equações quasi-lineares:

(a) $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy$;

(b) $u\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$;

(c) $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=(x+y)u$;

(d) $\dfrac{\partial u}{\partial y}=3y^2$;

(e) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=(u^2+1)xy$;

(f) $(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=(x-y)$;

(9) Determine as soluções das seguintes equações que passam pela curva C:

(a) $(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=(x-y)$, $u(x,y)=1+x$;

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=u$, $u\equiv$ const. sobre a recta $x=t\,,\ y=0$, $t\in\mathbb{R}^+$;

(c) $y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xyu$ e $u\equiv t^2$ sobre a recta $x=t\,,\ y=t$, $t\in\mathbb{R}^+$;

(d) $u\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$ e $u\equiv 2t$ sobre a recta $x=t\,,\ y=1$, $t\in\mathbb{R}$.

(10) Determine uma aproximação de ordem três para as solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=u^2+\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u(0,x)=1+2x$;

(b) $u\dfrac{\partial u}{\partial t}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $u(0,x)=1+2x-3x^2$;

(c) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2(x^2-y^2)u$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=0$ e $u(0,y)=\exp(-y^2)$.

(d) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=(\sin u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u(0,x)=\pi/6+x$;

(e) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\exp(tx)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u(0,x)=1-x+x^2$;

Equações com derivadas parciais de segunda ordem.

(11) Considere a equação das ondas, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$:

(a) Determine uma mudança de variável que a leva à sua forma canónica $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0$.

(b) Mostre que, a soluação geral da equação das ondas vem dada por, $u(x,y)=F(x+y)+G(x-t)$ onde $F,G\in\mathrm{C}^2$.

(12) Para cada uma das seguintes equações descreva a região do plano onde as equações são hiperbólicas, parabólicas ou elípticas:

(a) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$;

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\sin(xy)u$;

(c) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+e^x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}=u$;

(d) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;

(13) Seja P o operador não-linear definido por $Pu=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2-u^2$.

(a) Mostre que e^x e e^{-y} são soluções da equação $Pu=0$.

(b) Mostre que e^x+e^{-y} não é solução da equação $Pu=0$.

(c) Contradizem estes resultados o princípio da sobreposição?

(14) Seja P o operador de Laplace $Pu = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) u$.

(a) Mostre que $u(x, y; \lambda) = \exp(-\lambda y) \cos(\lambda x)$ $\lambda \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação de Laplace $Pu = 0$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial \lambda}$ e verifique que é também uma família de soluções da equação de Laplace.

(c) Mostre que o integral $\displaystyle\int_0^\infty u(x, y; \lambda)\, \mathrm{d}\, \lambda$ é convergente e define uma função de expressão analítica $v(x, y)$. Verifique que v é ainda uma solução da equação de Laplace.

(15) Tendo em atenção o resultado do problema **185** resolva os seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u(0, y) = 0$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = y$;

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u(0, y) = \sin y$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 1$;

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $u(0, y) = \phi(y)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \psi(y)$, com ϕ, ψ funções contínuas.

(16) Aplicando transformada de Fourier mostre que, a solução geral do problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad u(0, x) = f(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ t \in \mathbb{R}^+\,,$$

é dada por

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right) \mathrm{d}\,\xi\,.$$

(17) Aplicando transformada de Fourier mostre que, a solução geral do problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad u(0, x) = f(x)\,, \quad u(t, 0) = \phi(t) \ \ x \in \mathbb{R}\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

é dada por

$$u(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\xi) \left(\exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(\frac{(\xi + x)^2}{4a^2 t}\right)\right) \mathrm{d}\,\xi$$
$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^t \phi(\eta) \exp\left(\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}\right) (t - \eta)^{-3/2}\, \mathrm{d}\,\eta\,.$$

(18) Mostre que em coordenadas polares a equação de Laplace se escreve na forma

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0\,.$$

(19) Mostre que a solução da equação de Laplace que verifica $u(\theta, R) = f(\theta)$ vem dada por

$$u(\theta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\xi - \theta) + r^2}\, \mathrm{d}\,\xi\,.$$

(20) Determine a solução da equação de Laplace que no interior da coroa circular $1 \leq r \leq 2$ que verifica as seguintes condições

$$u(\theta, 1) = 0\,, \quad u(\theta, 2) = y\,.$$