Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

29/10/2003 — Elementos de Topologia – Teste (Parte I) — **1h15m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **1.** Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \colon\ x = 1 - 1/n\,,\ n \in \mathbb{Z}^+\} \cup]-2\,,\,-1[\,.$$

Determine os conjuntos interior, aderência, derivado e fronteira de A, considerando A como subconjunto do espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde $\mathcal{T}$ é a topologia:

(a) usual;

(b) co-finita.

(5.0) **2.** Seja $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\delta(0) = 0$ e $\delta(x) = 1$, $x \neq 0$. Considere a função $\mathbf{d}\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de expressão analítica

$$\mathbf{d}\left((x_1, y_1)\,,\,(x_2, y_2)\right) = \delta(x_1 - x_2) + |y_1 - y_2|\,.$$

(a) Mostre que $\mathbf{d}$ define uma métrica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Considere o ponto $\boldsymbol{x} = (0,1)$. Identifique os conjuntos $B_1(\boldsymbol{x})$ e $B_2(\boldsymbol{x})$, na métrica $\mathbf{d}$.

(c) Comente a frase:
— *Os espaços topológicos* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ *e* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathbf{d}})$*, onde* $\mathcal{T}$ *e* $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$ *são as topologias usual e induzida sobre* $\mathbb{R}^2$ *pela métrica* $\mathbf{d}$*, são topologicamente equivalentes.*

(d) Verifique se a sucessão de termo geral $\boldsymbol{x}_n = (1/n\,,\,1/n)$, é de Cauchy no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, \mathbf{d})$.

(e) Mostre que $\mathcal{B} = \{\{x\} \times]a, b[\colon\ x, a, b \in \mathbb{R}\}$ é uma base da topologia induzida por $\mathbf{d}$, $\mathcal{T}_{\mathbf{d}}$.

(2.0) **3.** Considere os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$ e a função identidade entre estes espaços, f. Mostre que f é contínua quando e só quando $\mathcal{T}_1$ é mais fina que $\mathcal{T}_2$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

17/12/2003 Elementos de Topologia – Teste (Parte II) **1h15m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **4.** Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos.

(a) Defina homeomorfismo, $f: X \to Y$.

(b) Defina sucessão convergente no espaço topológico $(X, \mathcal{T}_1)$.

(c) Estabeleça o teorema dos valores intermédios para funções contínuas entre os espaços topológicos dados.

(4.0) **5.** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Se K é um subconjunto compacto do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, então $K \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ é compacto, onde $x_1, \ldots, x_n$ é um qualquer n-uplo de elementos de X .

(b) As componentes conexas de um espaço topológico são conjuntos fechados.

(c) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_1)$ com $n > 1$ é homeomorfo a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$, onde $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ são as topologias usuais.

(d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ para alguma topologia $\mathcal{T}$.

(3.0) **6.** Considere o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ onde

$$\mathcal{T} = \{]-a, a[: a \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} .$$

(a) Dê um exemplo de um subconjunto não trivial de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ que seja compacto e outro que não seja compacto.

(b) Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é conexo ou de Hausdorff.

(c) Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ verifica o segundo axioma da numerabilidade.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

28/01/2004 Elementos de Topologia – Exame (Parte I) **1h10m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **1.** Seja X um conjunto não-vazio.

(a) Defina topologia $\mathcal{T}$ sobre X.

(b) Dê uma definição de métricas topologicamente equivalentes sobre X.

(c) Enuncie o teorema do ponto fixo de Banach.

(4.0) **2.** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) No espaço métrico (X, δ), onde δ é a distância discreta, todos o subconjunto de X é aberto.

(b) Uma aplicação contínua entre os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$ é necessariamente aberta.

(c) A equação $\sqrt{2+\sqrt{x}} = x$ tem uma e uma só solução em $[1, +\infty[$.

(d) O conjunto $\mathcal{B} = \{U \subset \mathbb{R} \colon \mathbb{R} \setminus U$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{Z}\}$ é base para uma topologia sobre $\mathbb{R}$.

(3.0) **3.** Considere a função $\ell \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com expressão analítica

$$\ell((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & , \ x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & , \ x_1 \neq x_2 \,. \end{cases}$$

(a) Mostre que ℓ é uma métrica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Para $\boldsymbol{x} = (0, 2)$ determine $B_1(\boldsymbol{x})$ e $B_3(\boldsymbol{x})$ e identifique-os geometricamente.

(c) Verifique se a sucessão $(1/n, 1/n)$ é de Cauchy em $(\mathbb{R}^2, \ell)$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

28/01/2004 Elementos de Topologia – Exame (Parte II) **1h10m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **4.** Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos.

(a) Defina imersão, $f\colon X \to Y$.

(b) Defina sucessão convergente no espaço topológico $(X, \mathcal{T}_1)$.

(c) Estabeleça o teorema de Weierstrass para funções contínuas entre os espaços topológicos dados.

(4.0) **5.** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico de Hausdorff. Se a sucessão $(x_n) \subset X$ tiver limite, então o limite é único.

(b) O espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é conexo, para toda a topologia $\mathcal{T}$.

(c) Se o espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é conexo por caminhos, então é conexo.

(d) A aplicação $f\colon [\,0, 2\pi\,[\to S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 = 1\,\}$, com expressão analítica $f(t) = (\cos t, \sin t)$ é um homeomorfismo.

(3.0) **6.** Seja $X = \mathbb{N} \cup \{a, b\}$, com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $a \neq b$. Pode ver-se que o conjunto

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \{X \setminus A\colon A \text{ é finito}\,\}$$

é uma topologia, onde $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é o conjunto das partes de $\mathbb{N}$.

(a) Mostre que $(X, \mathcal{T})$ é um espaço compacto que não é de Hausdorff.

(b) Dê um exemplo de um subespaço de $(X, \mathcal{T})$ que é de Hausdorff, mas não é compacto.

(c) Verifique que $(X, \mathcal{T})$ é desconexo.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

12/02/2004 Elementos de Topologia – Exame (Parte I) **1h10m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **1.** Seja X um conjunto não-vazio.

(a) Defina base, $\mathcal{B}$, de uma topologia sobre X.

(b) Defina a topologia gerada por uma base, e mostre que é realmente uma topologia.

(c) Defina ponto de acumulação de um subconjunto A, do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$.

(4.0) **2.** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) A topologia induzida no conjunto $A = \{1/n\,,\ \ n \in \mathbb{N}\}$ pela topologia usual em $\mathbb{R}$, é a topologia discreta.

(b) Em $\mathbb{R}$ a topologia usual é mais fina do que a topologia co-finita.

(c) A função $f\colon [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ de expressão analítica $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$ é uma contracção.

(d) Uma sucessão de Cauchy num espaço métrico é convergente.

(3.0) **3.** Considere o conjunto $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset\,,\ \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,,\ \ a \in \mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ é um espaço topológico.

(b) Calcule o interior, a aderência e o derivado do conjunto
$$A = [0, 1[\cup \{2\}$$
como subconjunto dos espaços topológicos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$, onde $\mathcal{T}_2$ é a topologia usual.

12/02/2004 Elementos de Topologia – Exame (Parte II) **1h10m**

Licenciatura em Matemática

(3.0) **4.** Sejam $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ espaços topológicos.

(a) Defina espaço topológico conexo $(X, \mathcal{T}_1)$.

(b) Mostre que:

— *Se $(X, \mathcal{T}_1)$ é uma espaço topológico conexo e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, então $f(X)$ é conexo.*

(c) Comente:

— *Uma aplicação contínua, f, entre os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(Y, \mathcal{T}_2)$ é um homeomorfismo, quando e só quando f é bijectiva.*

(4.0) **5.** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) As vogais A e E são homeomorfas.

(b) O conjunto $S = \{(x\,,\, \sin(1/x))\,,\;\; x > 0\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ é conexo.

(c) Num espaço de Hausdorff todo o fechado é compacto.

(d) A união finita de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

(3.0) **6.** Considere o espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ onde $\mathcal{T} = \{\emptyset\,,\, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,,\;\; a \in \mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ não é de Hausdorff, mas é conexo.

(b) Justifique que não existe uma métrica sobre $\mathbb{R}$ que induza a topologia $\mathcal{T}$.

(c) Verifique se a sucessão de termo geral, $u_n = n$, é convergente em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.