Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

19/01/2005 Elementos de Topologia – Exame **2h30m**

Licenciatura em Matemática

(6.0) **1.** Seja X um conjunto não vazio.

(a) Defina topologia induzida por uma métrica $\mathbf{d}$ em X.

(b) Enuncie o teorema do ponto fixo de Banach no espaço métrico $(X, \mathbf{d})$.

(c) Considere a topologia $\mathcal{T}$ em X. Defina base dessa topologia.

(d) Estabeleça o teorema de Weierstrass para funções contínuas entre um espaço topológico e um espaço métrico.

(7.5) **2.** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) $\mathbb{R}$ com a topologia usual é conexo por caminhos.

(b) As vogais A e E são homeomorfas.

(c) Se dois conjuntos têm o mesmo interior, então coincidem.

(d) Existe um espaço topológico conexo com duas componentes conexas.

(e) Todo e espaço métrico é de Hausdorff.

(f) A sucessão (n) é convergente em $\mathbb{R}$ com a topologia co-finita.

(6.5) **3.** Considere a função $\mathbf{d}\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ de expressão analítica

$$\mathbf{d}(n,m) = \begin{cases} |1/n - 1/m| & , \; n\,m \neq 0 \\ 1/n & , \; m = 0 \,,\; n \neq 0 \\ 1/m & , \; n = 0 \,,\; m \neq 0 \\ 0 & , \; n = m = 0 \end{cases}.$$

(a) Mostre que $(\mathbb{N}_0, \mathbf{d})$ é um espaço métrico.

(b) Calcule $\mathrm{B}_r(0)$, $r \in \mathbb{R}^+$.

(c) Determine a aderência e o interior do conjunto $\{1, 2, 3\}$ em $(\mathbb{N}_0, \mathbf{d})$.

(d) Verifique se a função $f\colon (\mathbb{N}_0, \mathbf{d}) \to (\mathbb{N}_0, \mathbf{d})$ com $f(n) = 2\,n$ é contínua.

(e) Prove que o espaço topológico induzido por d em $\mathbb{N}_0$ é compacto, mas não é conexo.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

11/02/2005 Elementos de Topologia – Exame **2h30m**

Licenciatura em Matemática

(6.0) **1.** Sejam X , Y dois conjuntos não vazios.

(a) Defina topologia $\mathcal{T}$ em X .

(b) Defina homeomorfismo.

(c) Mostre que, se $(X\,,\,\mathcal{T}_1)$ é um espaço topológico compacto, $(Y\,,\,\mathcal{T}_2)$ um espaço topológico e $f\colon (X\,,\,\mathcal{T}_1) \to (Y\,,\,\mathcal{T}_2)$ é uma função contínua, então $f(X)$ é compacto.

(d) Seja $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Diga o que entende por topologia gerada por $\mathcal{S}$ em X .

(7.5) **2.** Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) $\mathbb{R}$ com a topologia usual é de Hausdorff.

(b) Existe em $\mathbb{R}$ uma topologia mais fina que a usual.

(c) Dois conjuntos disjuntos podem ter a mesma aderência.

(d) Se $f\colon (X\,,\,\mathbf{d}) \to (X\,,\,\mathbf{d})$ é uma função contínua tal que
$$\mathbf{d}\,(f(x)\,,\,f(y)) < \mathbf{d}\,(x\,,\,y)\,,\ x, y \in X \text{ com } x \neq y\,,$$
então f tem um ponto fixo.

(e) A imagem contínua de um espaço compacto num espaço métrico é limitada.

(f) Toda a sucessão de Cauchy num espaço métrico é convergente.

(6.5) **3.** Considere o conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, munido da métrica usual.

(a) Calcule o interior, a aderência e o derivado do conjunto
$$A = \{1 + 1/n\,,\ \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}\,.$$

(b) Mostre que $[0\,,\,1] \cap \mathbb{Q}$ não é compacto, exibindo uma cobertura aberta sem subcobertura finita.

(c) Averigúe se a sucessão, (u_n) , de termo geral $u_n = (1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, é convergente em $\mathbb{Q}$. Será $\mathbb{Q}$ um espaço métrico completo?

(d) Indique, justificando, uma função $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que é descontínua.
