Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
Elementos de Topologia
Caderno de Exercícios

Observação: Sempre que nada for dito em contrário, consideraremos $\mathbb{R}^n$ munido da métrica euclidiana.

Espaços Métricos

1. (a) Verifique se d é uma métrica em $\mathbb{R}$:

   i.
   $$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1+|x-y| & \text{se } x\neq y \end{cases} \end{array}$$

   ii.
   $$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} |x|+|y| & \text{se } x\neq y \\ 0 & \text{se } x=y \end{cases} \end{array}$$

   iii.
   $$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |x^2-y^2| \end{array}$$

   iv.
   $$\begin{array}{rcl} d:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |x^3-y^3|. \end{array}$$

   (b) Descreva as bolas abertas para cada uma das métricas da alínea anterior.

2. (a) Mostre que $(\mathbb{R}^n, d_j)$ é um espaço métrico para $n, j \in \mathbb{N}$ e $dj : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   $$d_j(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^j)^{\frac{1}{j}},$$

   com $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ e $y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$.

   (b) Averigue se d_∞, definida por $d_\infty(x,y) = \lim d_j(x,y)$, é uma métrica em $\mathbb{R}^n$

3. Represente geometricamente em $\mathbb{R}^2$ a bola aberta $B_1(0,0)$ para as métricas d_1, d_2 e d_∞ do exercício anterior.

4. Prove que (X,d) é um espaço métrico para todo o conjunto X e

   $$\begin{array}{rcl} d: X\times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1 & \text{se } x\neq y. \end{cases} \end{array}$$

5. Sejam X um conjunto e d' uma métrica em X. Verifique quais das funções $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definidas em seguida são métricas em X:

   (a) $d(x,y) = k\, d'(x,y)$ para algum número real não negativo k;

   (b) $d(x,y) = \min\{1, d'(x,y)\}$;

   (c) $d(x,y) = \frac{d'(x,y)}{1+d'(x,y)}$;

   (d) $d(x,y) = (d'(x,y))^2$.

6. Sejam (X, d) um espaço métrico, x um ponto de X e A e B subconjuntos não vazios de X. Definimos a distância do ponto x ao subconjunto A como o número real

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a),$$

e a distância de A a B como o número real

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

Mostre que:

(a) Para todo o par de pontos a, b e todo o subconjunto não vazio A de X,

$$|d(a, A) - d(b, A)| \leq d(a, b).$$

(b) A função $d : \mathcal{P}_*(X) \times \mathcal{P}_*(X) \to \mathbb{R}$ definida acima (onde $\mathcal{P}_*(X)$ denota o conjunto dos subconjuntos não vazios de X) não é uma métrica em $\mathcal{P}_*(X)$.

7. No conjunto das funções reais contínuas definidas em $[0, 1]$ considere as métricas ρ do supremo e σ do integral:

$$\rho(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in [0, 1]\},$$
$$\sigma(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

(a) Calcule, para cada uma dessas métricas, $d(\sin x, \cos x)$, $d(x^2, x)$ e $d(1 - x, x^2)$.

(b) Sejam $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ e $g(x) = x$. Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$ e a $B_1(g)$ para a métrica ρ.

(c) Poderá dar uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções de $B_1(f)$ (ou de $B_1(g)$) para a métrica σ?

8. No conjunto das funções reais e limitadas de domínio $[0, 1[$ considere a métrica ρ do supremo. Considere as funções

$$\begin{array}{rcl} f : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} g : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

(a) Calcule $\rho(f, g)$. Qual a condição menos restritiva que se deve impôr ao número real δ para que $g \in B_\delta(f)$?

(b) Seja $F = [0, 1[\times]-1, 1[$. O gráfico de g está contido em F?

(c) Compare, relativamente a funções limitadas $h : [0, 1[\to \mathbb{R}$, as duas condições seguintes:

i. $h \in B_1(f)$;

ii. $Gr(h) \subseteq F$.

(d) Dê uma ideia geométrica da região de $\mathbb{R}^2$ onde se situam os gráficos das funções que pertencem a $B_1(f)$.

9. Sejam (X, d) um espaço métrico e x e y elementos de X.

(a) Prove que, se x e y forem distintos, existem bolas abertas disjuntas B e B' tais que $x \in B$ e $y \in B'$.

(b) Sejam $x \neq y$ e $r > 0$ e $s > 0$ tais que $r + s \leq d(x, y)$. Mostre que as bolas abertas $B_r(x)$ e $B_s(y)$ são disjuntas.

(c) Sejam r e s números reais positivos tais que $B_r(x) = B_s(y)$. Podemos então concluir que $x = y$ ou que $r = s$?

10. Sejam (X,d) um espaço métrico e a um ponto de X. Mostre que:

(a) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$;

(b) $\{a\} = \bigcap_{r>0} B_r(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}(a)$;

(c) $B_r[a] = \bigcap_{s>r} B_s(a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r+\frac{1}{n}}(a)$;

(d) $B_r(a) = \bigcup_{0<s<r} B_s[a]$.

11. Dados um subconjunto A de um espaço métrico (X,d) e $r>0$ definimos

$$B_r(A) = \bigcup_{a\in A} B_r(a).$$

(a) Mostre que, quaisquer que sejam $A, B \subseteq X$:

(i) $B_r(A\cap B) \subseteq B_r(A) \cap B_r(B)$;

(ii) $B_r(A\cup B) = B_r(A) \cup B_r(B)$.

(b) Prove que, se x é um ponto de X e A é um subconjunto não vazio de X,

$$d(x,A) = \inf\{r>0 \,|\, x \in B_r(A)\}.$$

12. Se (X,d) é um espaço métrico e $A\subseteq X$, chama-se diâmetro de A a

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y)\,;\, x,y\in A\}$$

(que pertence a $[0,+\infty]$).

(a) Em $\mathbb{R}^2$ calcule o diâmetro de

i. $B_1(0,0)$,

ii. $]0,1]\times]0,1]$,

para as métricas d_1, d_2 e d_∞ (Exercício 2) e para a métrica discreta (Exercício 4).

(b) Dê um exemplo de uma bola aberta cujo o seu diâmetro seja diferente do dobro do seu raio.

(c) Prove que $\operatorname{diam}(A)\in\mathbb{R}$ se e só se A é limitado.

(d) Mostre que, se A e B são subconjuntos limitados e não vazios de X, então

$$\operatorname{diam}(A\cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A,B).$$

13. Mostre que um subconjunto A de um espaço métrico (X,d) é fechado se e só se

$$(\forall x\in X)\;\; x\in A \;\Leftrightarrow\; d(x,A)=0.$$

14. Seja (X,d) um espaço métrico.

(a) Mostre que uma bola fechada é sempre um conjunto fechado em X.

(b) Dê um exemplo que mostre que uma bola aberta pode ser um conjunto fechado.

15. Verifique quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são abertos ou fechados:

(a) $\mathbb{N}$;

(b) $[1,2[\cup]2,3[$;

(c) $\{0\}\cup\{x; x^2>2\}$;

(d) $\mathbb{Q}$;

(e) $[5,7]\cup\{8\}$;

(f) $\{\frac{1}{n}; n\in\mathbb{N}\}$.

16. Verifique se os seguintes conjuntos são abertos em $\mathbb{R}^2$:

(a) $]0,1[\times]0,1[$;

(b) $[0,1[\times]0,1[$;

(c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x\neq y\}$;

(d) $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{N}^2$.

17. Sejam $X\subseteq\mathbb{R}$ e $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ o espaço métrico das funções contínuas e limitadas, de X em $\mathbb{R}$, munido da métrica do supremo. Considere o subconjunto

$$A = \{f: X\to\mathbb{R} \,|\, \forall x\in X \;\; f(x)>0\}$$

de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Mostre que:

(a) se $X=[0,1]$, então A é aberto;

(b) se $X=]0,1]$, então A não é aberto.

18. Considere a função

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ 1+|x| & \text{se } x\neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Note que esta função é descontínua para a métrica usual em $\mathbb{R}$. Verifique porém que, se d é a métrica definida no Exercício 1(a)i, então a função $f:(\mathbb{R},d)\longrightarrow\mathbb{R}$ é contínua.

19. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica usual d_1 e a métrica d definida em 1(a)ii. Verifique se alguma das funções $f,g:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},d_1)$ é contínua, sendo

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\leq 0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\leq 1 \\ 1 & \text{se } x>1. \end{cases}$$

20. Suponha que $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ é contínua num ponto $a\in X$ tal que $f(a)>0$. Mostre que

$$\exists\, r>0 : \forall\, x\in B_r(a) \quad f(x)>0.$$

21. Sejam $g,h:(X,d)\to(X',d')$ aplicações contínuas. Dado $a\in X$, suponha que toda a bola aberta de centro a contém um ponto x tal que $g(x)=h(x)$. Conclua que $g(a)=h(a)$.

(Sugestão: Use o exercício anterior, definindo convenientemente a função f.)

22. Dada uma imersão isométrica $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mostre que existe $a\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x+a$ para todo o $x\in\mathbb{R}$, ou $f(x)=-x+a$ para todo o $x\in\mathbb{R}$. Em particular, f é uma isometria.

23. Considere a projecção $\begin{array}{rcl} p:(\mathbb{R}^2,d_\infty) & \longrightarrow & (\mathbb{R},|.|). \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$

   (a) Prove que p define, por restrição, uma isometria entre o subespaço métrico $X_a=\{(t,at):t\in\mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R}$ se e só se $|a|\geq 1$.

   (b) E se substituir d_∞ por d_1 ou d_2?

24. Seja (X,d) um espaço métrico limitado e $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas de X em $\mathbb{R}$. Para cada ponto $a\in X$, defina-se $f_a:X\to\mathbb{R}$ por $f_a(x)=d(a,x)$ para $x\in X$. Mostre que:

   (a) A aplicação f_a é limitada;

   (b) A aplicação $\begin{array}{rcl} F:X & \longrightarrow & \mathcal{L}(X,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & f_a \end{array}$ é uma imersão isométrica.

25. (a) Mostre que as métricas d_1, d_2 e d_∞ (Exercício 2) definem a mesma topologia em $\mathbb{R}^2$.

   (b) Verifique quais das métricas d definidas no Exercício 5 são topologicamente equivalentes a d'.

   (c) Compare as topologias definidas em $\mathbb{R}$ pelas métricas do Exercício 1.

26. Considere, no conjunto $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, as métricas ρ do supremo e σ do integral.

   (a) Sendo $0<r\leq 2$, considere

$$\begin{array}{rcl} g:[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ x & \longmapsto & g(x)=\begin{cases} \frac{-4x}{r}+4 & \text{se } 0\leq x<\frac{r}{2} \\ 2 & \text{se } \frac{r}{2}\leq x\leq 1 \end{cases} \end{array}$$

   Mostre que $g\in B_r^\sigma(f)\setminus B_1^\rho(f)$, onde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ é a função definida por $f(x)=2$.

   (b) Conclua que ρ e σ não são topologicamente equivalentes.

   (c) Mostre que $\mathcal{T}^\sigma\subset\mathcal{T}^\rho$.

27. Diga se o espaço métrico X é completo, quando:

(a) $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;

(b) $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$;

(c) $X = [0,1] \cup [2,3]$;

(d) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y \geq 1/x\}$;

(e) X é finito;

(f) X é discreto.

28. Mostre que o espaço métrico do Exercício 1(a)ii é completo.

29. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica d definida por $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. Mostre que $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico completo.

30. Mostre que, num espaço métrico:

(a) a união finita de subespaços completos é um subespaço completo;

(b) a união infinita de subespaços completos nem sempre é um subespaço completo;

(c) a intersecção de qualquer família de subespaços completos é ainda um subespaço completo.

31. Considere, no conjunto das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ munido da métrica do integral, a sucessão $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ n(x + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}) & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

(b) Mostre que este espaço não é completo.

(Sugestão: Mostre que a sucessão da alínea (a) não é convergente.)

32. Aplicando o Teorema do ponto fixo, prove que a equação $\sqrt{2+\sqrt{x}} = x$ tem uma única solução em $[1, +\infty)$.

33. Seja $f : (0, \frac{1}{4}) \longrightarrow (0, \frac{1}{4})$ definida por $f(x) = x^2$. Mostre que f é uma contracção mas não tem nenhum ponto fixo. Comente este resultado, tendo em conta o Teorema do ponto fixo.

34. Considere a função $f : [1, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$ definida por $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Mostre que, se $x \neq y$, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ e que f não tem nenhum ponto fixo, embora $[1, +\infty)$ seja um espaço completo.

Espaços Topológicos

35. Verifique quais das seguintes famílias de subconjuntos são topologias em $X = \{a, b, c, d, e\}$:

(a) $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$;

(b) $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$;

(c) $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$;

(d) $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}\}$.

36. Mostre que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]q, +\infty[\,|\, q \in \mathbb{Q}\}$ não é uma topologia em $\mathbb{R}$.

37. Prove que a intersecção de duas topologias num conjunto X ainda é uma topologia em X, mas que a sua união nem sempre é uma topologia em X. O que poderemos dizer àcerca da intersecção de uma família qualquer de topologias em X?

38. Dê exemplo de duas topologias $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ num conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \not\subseteq \mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_2 \not\subseteq \mathcal{T}_1$.

39. Mostre que todo o subespaço de um espaço discreto é discreto.

40. Seja $\mathcal{T}$ a topologia usual em $\mathbb{R}$.

(a) Determine a topologia relativa $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ no conjunto $\mathbb{N}$.

(b) Verifique se cada um dos seguintes subconjuntos de $[0,1]$ é aberto em $[0,1]$:
(i) $]1/2,1]$; (ii) $]1/2,2/3]$; (iii) $]0,1/2]$.

41. Considere o conjunto $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{]a,+\infty[\,|\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Determine a topologia relativa de $[0,1]$ induzida por $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

42. Considere o conjunto $\mathcal{T}_0 = \{A \,|\, A \subseteq]-\infty,0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{T}_0$ é uma topologia em $\mathbb{R}$.

(b) Determine a topologia relativa de $]-\infty,0]$ e de $]0,+\infty[$ induzida por $\mathcal{T}_0$.

43. Mostre que, se X e Y são conjuntos e $f : X \to Y$ é uma aplicação, então, se A, A' e A_j $(j \in J)$ são subconjuntos de X e B, B' e $B_i (i \in I)$ são subconjuntos de Y,

(a) $A \subseteq A' \Rightarrow f(A) \subseteq f(A')$; (b) $B \subseteq B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$;

(c) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$; (d) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$; (e) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$;

(f) $f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$; (g) $f(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} f(A_j))$; (h) $f(\bigcap_{j\in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} f(A_j)$;

(i) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$; (j) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

(l) Apresente exemplos que mostrem que as inclusões das alíneas (c), (d), (f) e (h) podem ser estritas;

(m) Indique uma condição que permita substituir o sinal de inclusão – em (c), (d), (f) e (h) – pelo de igualdade;

(n) Mostre que na alínea (f) não se pode substituir $f(X)$ por Y.

44. Prove que, se $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ é contínua, também o é $f : (X,\mathcal{T}_1) \to (Y,\mathcal{T}'_1)$ sempre que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}'_1 \subseteq \mathcal{T}'$.

45. Prove que, se $f : X \to Y$ é constante, então f é contínua em relação a quaisquer topologias $\mathcal{T}_1$ em X e $\mathcal{T}_2$ em Y.

46. Considere a topologia $\mathcal{T}$ definida no Exercício 41. Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R},\mathcal{T}) \to (\mathbb{R},\mathcal{T})$ definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$ são contínuas.

47. Verifique se as funções $f, g : (\mathbb{R},\mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_0)$, com $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$ são contínuas, onde $\mathcal{T}_0$ é a topologia definida no Exercício 42.

48. Considere $\mathbb{R}$ munido da topologia usual. Mostre que, se toda a função $f : (X,\mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é contínua, então $\mathcal{T}$ é a topologia discreta em X.

49. Sejam $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ uma função contínua, A um subconjunto de X e f_A a restrição de f a A.

(a) Mostre que, se $\mathcal{T}_A$ é a topologia relativa definida em A por $\mathcal{T}$, então $f_A : (A,\mathcal{T}_A) \to (Y,\mathcal{T}')$ é contínua.

(b) Encontre um exemplo que mostre que o resultado recíproco é falso.

50. Mostre que:

(a) o intervalo $[a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$ é homeomorfo ao intervalo $[0,1]$;

(b) qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

(c) o intervalo $[0,1]$ não é homeomorfo ao intervalo $]0,1]$.

51. Mostre que $\mathcal{B} = \{]r,s[\,;\, r,s \in \mathbb{Q},\ r < s\}$ é uma base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$.

52. Verifique se $\mathcal{S} = \{\{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}\}$ é uma base para uma topologia em $W = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ e, em caso afirmativo, determine essa topologia.

53. Seja $X = \{a, b, c, d, e\}$. Construa a topologia gerada por $\mathcal{U}$ quando:

    (a) $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, e\}\}$;   (a) $\mathcal{U} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, e\}\}$;

54. Determine a topologia em $\mathbb{R}$ gerada por $\mathcal{S} = \{[x, x + 1]; x \in \mathbb{R}\}$.

55. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia usual $\mathcal{T}$ e a topologia $\mathcal{T}'$ que tem como base

$$\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

    Mostre que $\mathcal{T}$ é menos fina do que $\mathcal{T}'$.

56. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $f : X \to [0, 1]$ uma aplicação. Mostre que, se $f^{-1}(]a, 1])$ e $f^{-1}([0, b[)$ são abertos de X para todo o $a, b \in]0, 1[$, então f é contínua.

57. Seja X um espaço topológico. Mostre que, para que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ seja contínua é necessário que os conjuntos $\{x \in X : f(x) > 0\}$ e $\{x \in X : f(x) < 0\}$ sejam abertos. Será suficiente?

58. Considere a topologia usual em $\mathbb{R}$ e a topologia cofinita

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq \mathbb{R}\,;\, \mathbb{R} \setminus A \text{ é um conjunto finito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

    Prove que todo o subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado e conclua que a topologia cofinita é menos fina do que a usual.

59. Determine os subconjuntos fechados do espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, onde

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{] - \infty, a[; a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}.$$

60. Considere $\mathbb{Q}$ munido com a topologia de subespaço de $\mathbb{R}$.

    (a) Determine todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente abertos e fechados.
    (b) Indique um subconjunto de $\mathbb{Q}$ (diferente de $\emptyset$ e de $\mathbb{Q}$) que seja simultaneamente aberto e fechado em $\mathbb{Q}$.
    (c) Mostre que toda a aplicação contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ é constante.

61. Sejam X um espaço topológico e A um subconjunto de X. Considere a função característica, $\chi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

    (a) Prove que, se χ é contínua, então A é simultaneamente aberto e fechado;
    (b) Prove que, se A é aberto e fechado, então χ é contínua.

62. Considere a seguinte topologia em $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$$

    Indique as vizinhanças dos pontos c e d.

63. Considere a topologia euclidiana em $\mathbb{R}$. Verifique se algum dos conjuntos seguintes é uma base de vizinhanças de 0:

    (a) $\{\, [0, \varepsilon[\,;\, \varepsilon > 0\}$;
    (b) $\{\,] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\,;\, n \in \mathbb{N}\}$;
    (c) $\{\,] - 1 + \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1}[\,;\, n \in \mathbb{N}\}$;
    (d) $\{\, [-\delta, \delta]\,;\, \delta > 0\}$.

64. Considere agora $\mathbb{R}^2$ munido da topologia euclidiana. Verifique se algum dos conjuntos é uma base de vizinhanças do ponto (x_0, y_0):

(a) $\{ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} < 1\} ;\, a \in \mathbb{R}^+ \}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$;

(b) $\{ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\, |x-2| + |y-3| < \frac{1}{n}\} ;\, n \in \mathbb{N}\}$, $(x_0, y_0) = (2,3)$.

65. Denotando por $\mathcal{T}_1$ a topologia cofinita, verifique se

(a) $\{]-\delta, \delta[\,;\, \delta > 0\}$ é uma base de vizinhanças de 0 em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$;

(b) o conjunto $\{\{1\} \cup \{k \in \mathbb{N} ;\, k \geq n\} ;\, n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de vizinhanças de 1 em $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$.

66. Considere agora a topologia $\mathcal{T}_0 = \{\,]-\infty, a[\,;\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}$ e verifique se os seguintes conjuntos são bases de vizinhanças de 7:

(a) $\{\,]-\infty, 7+\frac{1}{n}[\,;\, n \in \mathbb{N}\}$; (b) $\{\,]-\infty, 7+\delta]\,;\, \delta \geq 0\}$;

67. Sejam (X, d) um espaço métrico e $\mathcal{T}$ a topologia definida por d em X. Mostre que, para cada ponto x de X, $\mathcal{B}_x = \{B_{\frac{1}{n}}(x); n \in \mathbb{N}\}$ é uma base de vizinhanças de x.

68. Suponha que, para cada ponto y de $(Y, \mathcal{T}')$, $\mathcal{U}_y$ é um sistema fundamental de vizinhanças de y, e seja $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ uma função. Mostre que:

(a) f é contínua em x se e só se, qualquer que seja $U \in \mathcal{U}_{f(x)}$, $f^{-1}(U)$ é uma vizinhança de x;

(b) f é contínua se e só se, sempre que $U \in \mathcal{U}_{f(x)}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_x$.

69. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A e B dois subconjuntos de X. Mostre que:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$; (c) as inclusões anteriores podem ser estritas.
(a) $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B)$ e $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$;

70. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subseteq X$. Mostre que:

(a) $\overline{A} = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)$; (c) $\mathrm{fr}A = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A$ aberto e fechado;

(b) $\overline{A} = A \cup \mathrm{fr}A$; (d) $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{fr}A \cup \mathrm{int}(X \setminus A)$.

71. Seja $(\mathcal{B}_x)_{x \in X}$ um sistema fundamental de vizinhanças do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$. Prove que, se A é um subconjunto de X, então:

(a) $\overline{A} = \{x \in X \,|\, (\forall B \in \mathcal{B}_x)\; B \cap A \neq \emptyset\}$; (b) $\mathrm{int}(A) = \{x \in X \,|\, (\exists B \in \mathcal{B}_x)\; B \subseteq A\}$;

(c) $\mathrm{fr}A = \{x \in X \,|\, (\forall B \in \mathcal{B}_x)\; B \cap A \neq \emptyset \neq B \cap X \setminus A\}$.

72. Calcule o interior, o exterior, o fecho, a fronteira e o conjunto derivado de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(a) $A =]0,1] \cup \{2\}$; (c) $C = \mathbb{Q}$; (e) $E = \{(-1)^n - \frac{(-1)^n}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$;

(b) $B = \mathbb{R}$; (d) $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$; (f) $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

73. (a) Mostre que o conjunto $\mathcal{T}$, constituído por $\mathbb{N}$, pelo vazio e pelos conjuntos da forma $K_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, é uma topologia no conjunto dos números naturais.

(b) Determine o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o derivado dos conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2n - 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

74. Determine o interior, o fecho, a fronteira, o exterior, o conjunto derivado e o conjunto dos pontos isolados de $A = [7, +\infty[$, $B = [3, 7[$ e $C = \mathbb{N}$ no espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, quando:

(a) $\mathcal{T}$ é a topologia euclidiana; (b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$; (c) $\mathcal{T} = \{\, A \,|\, A \subseteq]-\infty, 0]\,\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

75. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico metrizável, sendo $\mathcal{T}$ definida pela métrica d. Prove que:

(a) o fecho de um conjunto A é dado por $\overline{A} = \{x \in X \,|\, \mathrm{dist}(x, A) = 0\}$;

(b) a bola fechada $B_\delta[x]$ nem sempre é o fecho da bola aberta $B_\delta(x)$.

76. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e A um subconjunto de X. Prove que as seguintes equivalências não se verificam, exibindo contra-exemplos:

(a) A é aberto se e só se $A = \operatorname{int}(\overline{A})$; (b) A é fechado se e só se $A = \overline{\operatorname{int}(A)}$.

77. Mostre que, qualquer que seja o subconjunto A de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, A é denso se e só se, qualquer que seja o aberto U, se $U \cap A = \emptyset$, então $U = \emptyset$.

78. Seja $(Y, \mathcal{T}_Y)$ um subespaço de $(X, \mathcal{T})$. Para $A \subseteq Y$, sejam $\overline{A}$ e $\operatorname{int}(A)$ o fecho e o interior de A relativamente a $\mathcal{T}$, e $\overline{A}^Y$ e $\operatorname{int}(A)^Y$ o fecho e o interior de A relativamente a $\mathcal{T}_Y$. Prove que:

(a) $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$; (b) $\operatorname{int}(A) = \operatorname{int}(A)^Y \cap \operatorname{int}(Y)$.

79. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subseteq X$. Compare $\operatorname{fr}(\operatorname{int}(A))$, $\operatorname{fr}(A)$ e $\operatorname{fr}(\overline{A})$.

80. Considere a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ no conjunto $X = \{a, b, c\}$ e a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, Y, \{u\}\}$ no conjunto $Y = \{u, v\}$. Determine uma base $\mathcal{B}$ da topologia produto em $X \times Y$.

81. Determine uma base para a topologia produto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ quando $\mathcal{T}$ é a topologia da alínea (b) do Exercício 74.

82. Sejam X e Y espaços topológicos e $X \times Y$ o seu espaço produto. Dados $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, mostre que:

(a) $\operatorname{int}(A \times B) = \operatorname{int}(A) \times \operatorname{int}(B)$; (b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

83. Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é de Hausdorff quando $\mathcal{T}$ é cada uma das seguintes topologias:

(a) $\mathcal{T}$ é a topologia euclidiana;
(b) $\mathcal{T}$ é a topologia discreta;
(c) $\mathcal{T}$ é a topologia grosseira;
(d) $\mathcal{T}$ é a topologia cofinita;
(e) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;
(f) $\mathcal{T} = \{A \mid A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\mathbb{R}\}$;
(g) $\mathcal{T}$ é a topologia gerada pela base $\{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R},\, a < b\}$.

84. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a topologia $\mathcal{T}' = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{U_r \;;\; r > 0\}$, onde $U_r = \{(x, y) \;;\; \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$. Mostre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}')$ não é de Hausdorff.

85. Prove que, se X é finito, $(X, \mathcal{T})$ é um espaço de Hausdorff se e só se $\mathcal{T}$ é a topologia discreta.

86. Prove que, se $\mathcal{T}$ é uma topologia metrizável num conjunto X, então o espaço $(X, \mathcal{T})$ é de Hausdorff.

87. (a) Mostre que, se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e injectiva e Y é um espaço de Hausdorff, então também X é de Hausdorff.
(b) Conclua que todo o subespaço de um espaço de Hausdorff é de Hausdorff.
(c) Dê um exemplo de um espaço não de Hausdorff com um subespaço não trivial de Hausdorff.

88. Mostre que o produto de dois espaços de Hausdorff é de Hausdorff.

89. Sejam X um espaço topológico, Y um espaço de Hausdorff e $f, g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{x \in X \;;\; f(x) = g(x)\}$ é fechado em X.

90. (a) Usando o resultado do exercício anterior, mostre que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; xy = 1\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$.
(b) Conclua que as projecções de um espaço produto nos factores nem sempre são aplicações fechadas. (Sugestão: Considere o conjunto A da alínea anterior e mostre que $p_{\mathbb{R}}(A)$ não é fechado.)

Conexão e Compacidade

91. Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ é um espaço conexo, quando:

    (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;

    (b) $\mathcal{T}$ tem como base $\{]a, b]\,;\, a, b \in \mathbb{R},\, a < b\}$.

    (c) $\mathcal{T} = \{\, A\,;\, A \subseteq] - \infty, 0]\} \cup \{\, \mathbb{R}\,\}$;

92. Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ topologias no conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Verifique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

    (a) $(X, \mathcal{T}_1)$ conexo $\Rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ conexo;

    (b) $(X, \mathcal{T}_2)$ conexo $\Rightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ conexo.

93. Quais dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$ são conexos?

    (a) $B_1(1, 0)$;

    (b) $B_1(1, 0) \cup B_1(-1, 0)$;

    (c) $\overline{B_1(1, 0)} \cup \overline{B_1(-1, 0)}$;

    (d) $\overline{B_1(1, 0)} \cup B_1(-1, 0)$;

    (e) $\{(q, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in [0, 1]\} \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$;

    (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } y = \frac{1}{x}\}$;

    (g) o conjunto de todos os pontos que têm pelo menos uma coordenada em $\mathbb{Q}$.

94. Dê exemplos de:

    (a) conexos de $\mathbb{R}^2$ cuja intersecção seja desconexa;

    (b) uma sucessão decrescente de conexos de $\mathbb{R}^2$ cuja intersecção seja desconexa.

95. (a) Dê um exemplo de um conexo de $\mathbb{R}^2$ (diferente de $\emptyset$ e de $\mathbb{R}^2$):

        i. X_1 tal que o complementar de X_1 seja conexo;

        ii. X_2 tal que o complementar de X_2 tenha duas componentes conexas;

        iii. X_4 tal que o complementar de X_4 tenha quatro componentes conexas;

        iv. X tal que o complementar de X tenha uma infinidade de componentes conexas.

    (b) Se os problemas de (a) fossem postos relativamente a $\mathbb{R}$ (em vez de $\mathbb{R}^2$), que respostas daria? Porquê?

96. Mostre que se o espaço X, não singular, é conexo e de Hausdorff, então não tem pontos isolados.

97. Sejam A e B fechados de X tais que $A \cap B$ e $A \cup B$ são conexos. Mostre que então A e B são conexos.

    Mostre, com um contra-exemplo em $\mathbb{R}$, que a hipótese "A e B fechados"é essencial.

98. (a) Mostre que o gráfico de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um subespaço conexo de $\mathbb{R}^2$.

    (b) Será necessariamente contínua uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico seja conexo?

99. Mostre que os seguintes conjuntos são conexos por caminhos:

    (a) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, para $n > 1$;

    (b) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$.

    (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$;

100. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq 1\}.$$

    Verifique que A é conexo mas não é conexo por caminhos.

101. Mostre que:

    (a) $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.

    (b) Quaisquer dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos:

$$\begin{aligned} A &= ([0, 2] \times \{0, 1\}) \cup (\{1\} \times [0, 1]); \\ B &= \{(x, x) \mid |x| \leq 1\} \cup \{(x, -x) \mid |x| \leq 1\}; \\ C &= \{(x, x) \mid |x| \leq 1\} \cup \{(x, -x) \mid x \in [-1, 0]\}. \end{aligned}$$

102. (a) Mostre que todo o espaço finito é compacto.
    (b) Mostre que um espaço topológico discreto é compacto se e só se é finito.
    (c) Mostre que todo o espaço munido da topologia cofinita é compacto.
    (d) Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ duas topologias definidas num conjunto A tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Mostre que, se $(A, \mathcal{T}_2)$ é compacto, também $(A, \mathcal{T}_1)$ é compacto.

103. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ são compactos?

    (a) $[0, 1)$;
    (b) $[0, +\infty)$;
    (c) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$;
    (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x^2 + y^2 = 1\}$;
    (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x^2 + y^2 < 1\}$;
    (f) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x \geq 1, \quad 0 \leq y \leq 1/x\big\}$.

104. Verifique se os subconjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\{-2\}\cup]-1, 0[$ e $]0, 1[$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ são compactos, quando:

    (a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[\,;\, a \in \mathbb{R}\}$;
    (b) $\mathcal{T} = \{\, A\,;\, A \subseteq]-\infty, 0]\} \cup \{\,\mathbb{R}\,\}$.

105. Considere em $\mathbb{R}$ a topologia $\mathcal{T}'$ que tem como base $\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Mostre que o intervalo $[0, 1]$ (com a topologia de subespaço de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$) não é compacto.

106. Seja X um espaço topológico. Mostre que:

    (a) a reunião finita de subespaços compactos de X é um compacto;
    (b) a intersecção de um subconjunto fechado com um subconjunto compacto de X é compacta;
    (c) se X é um espaço de Hausdorff, então a intersecção de qualquer família de subespaços compactos de X é ainda um compacto;
    (d) no resultado da alínea anterior é fundamental a hipótese de que o espaço topológico X seja de Hausdorff;
    (e) um subespaço compacto nem sempre é fechado.

107. Considere $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ o espaço topológico definido no Exercício 73.

    (a) Verifique que $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ não é compacto.
    (b) Verifique que toda a função contínua $f : (\mathbb{N}, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ é constante.

108. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Mostre que, se A não é compacto, então:

    (a) existe uma aplicação contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que não é limitada;
    (b) existe uma aplicação contínua $f : A \to \mathbb{R}$ que, embora limitada, não tem máximo.

109. (a) Sejam A um subconjunto fechado e C um subespaço compacto de um espaço métrico. Mostre que se $A \cap C = \emptyset$, então $d(A, C) > 0$.
    (b) Dê um exemplo que mostre que na alínea anterior não é suficiente que C seja fechado.

110. Considere em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a métrica usual. Mostre que existem subespaços fechados e limitados de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ que não são compactos.

111. Considere em $\mathbb{R}$ a métrica d definida por $d(x, y) = |x| + |y|$ se $x \neq y$ (Exercício 1(a)ii).
    Mostre que o conjunto $]-1, 1[$:

    (a) é fechado e limitado;
    (b) não é compacto.

112. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são localmente conexos?

    (a) $\mathbb{Q}$;
    (b) $\mathbb{N}$;
    (c) $]0, 1[$;
    (d) $[0, 1]$;
    (e) $]0, 1[\cup\{2\}$;
    (f) $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

113. (a) Mostre que nem todo o espaço localmente conexo é conexo.

   (b) Verifique que o espaço topológico A do Exercício 100 não é localmente conexo, apesar de ser conexo.

114. (a) Mostre que um espaço topológico discreto é localmente conexo.

   (b) Mostre que um espaço topológico grosseiro é localmente conexo.

   (c) Tendo em conta que existem espaços topológicos que não são localmente conexos, que conclusões se podem retirar das alíneas anteriores.

115. (a) A imagem de uma sucessão de Cauchy em X por uma função contínua $f : (X, d) \to (Y, d')$ pode não ser uma sucessão de Cauchy em Y. Dê um exemplo.

   (b) O que acontece se X for completo?

116. Dê exemplos de dois espaços métricos homeomorfos, sendo um deles completo e o outro não.

117. Diga se é ou não verdade que toda a função (entre espaços métricos) cujo domínio está munido da métrica discreta é uniformemente contínua.

118. Mostre que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$, é contínua mas não é uniformemente contínua.

119. Sejam (X, d) um espaço métrico e $A \subseteq X$. Verifique que a função $f_A : (X, d) \to \mathbb{R}$ definida por $f_A(x) = d(x, A)$ é uniformemente contínua.

120. (a) Mostre que, se $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, então é limitada.

   (b) Indique uma tal função f e uma sucessão de Cauchy em $]a, b[$ cuja imagem por f não seja uma sucessão de Cauchy em $\mathbb{R}$.

121. (a) Mostre que, se $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uniformemente contínua e (x_n) é uma sucessão de Cauchy, então $(f(x_n))$ é uma sucessão de Cauchy.

   (b) Mostre que a função $g : [1, +\infty[\to]0, 1]$, com $g(x) = \frac{1}{x}$, é uniformemente contínua.

   (c) Conclua que a imagem por uma função uniformemente contínua de um espaço completo pode não ser um espaço completo. (Note que g é uma bijecção uniformemente contínua com inversa contínua.)

   (d) Mostre, no entanto, que, se $f : (X, d) \to (Y, d')$ é uma aplicação bijectiva, uniformemente contínua, com inversa uniformemente contínua, então (X, d) é completo se e só se (Y, d') for completo.

122. Mostre que, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, a métrica discreta é topologicamente equivalente, mas não uniformemente equivalente, à métrica do Exercício 111.

123. (a) Considere a seguinte métrica em $]0, 1[$:

$$\begin{array}{rcl} d' :]0,1[\times]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right| \end{array}$$

   Mostre que a métrica euclidiana d é topologicamente equivalente, mas não uniformemente equivalente, a d'.

   (b) Considere agora a métrica

$$\begin{array}{rcl} d' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|} \end{array}$$

   em $\mathbb{R}$. Mostre que a métrica euclidiana d é uniformemente equivalente a d'.

Exercícios de Revisão

124. Seja X um espaço vectorial real. X diz-se um espaço vectorial normado se em X estiver definida uma aplicação $\|.\| : X \to \mathbb{R}$, designada por norma, que verifique as seguintes condições para todos os $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

    N1) $\|x\| \geq 0$ e $(\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0)$;

    N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

    N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

    (a) Prove que todo o espaço vectorial normado é um espaço métrico com a métrica definida por $d(x, y) = \|x - y\|$.

    (b) Mostre que o recíproco do resultado da alínea anterior não se verifica em geral, exibindo um espaço métrico cuja métrica não seja induzida por nenhuma norma.

    (c) Seja X um espaço vectorial normado e d uma métrica em X. Prove que d é induzida por uma norma se e só se

    $$(\forall x, y \in X)\ (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \ d(x + a, y + a) = d(x, y) \text{ e } \ d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y).$$

    (d) Mostre que em todo o espaço vectorial normado não nulo o diâmetro de qualquer bola aberta é igual ao dobro do respectivo raio.

    (e) Mostre que, se X é um espaço vectorial normado, $x \in X$ e $r > 0$, então

    $$\overline{B_r(x)} = B_r[x].$$

    (f) Dê um exemplo de um espaço métrico que não tenha esta propriedade.

125. Considere em $\mathbb{R}$ as sucessões $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(n)_{n \in \mathbb{N}}$.

    (a) No espaço topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ verifique se as sucessões são convergentes, e, em caso afirmativo, para que números reais convergem, quando $\mathcal{T}$ é definida como em cada alínea do Exercício 83.

    (b) Verifique ainda se são sucessões de Cauchy no espaço métrico euclidiano e no espaço métrico definido no Exercício 111.

126. Mostre que se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ são topologias num conjunto X tais que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão que converge para x em $(X, \mathcal{T}_2)$, então (x_n) também converge para x no espaço $(X, \mathcal{T}_1)$.

127. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para o ponto x no espaço topológico X. Mostre que $S = \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ é um subespaço compacto de X.

128. Defina uma topologia $\mathcal{T}$ em $\mathbb{N}$ de forma que o espaço $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ seja compacto e de Hausdorff.

129. Considere o conjunto $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ munido da topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \gamma, \delta\}\}$. Seja $Y = \{\beta, \gamma, \varepsilon\}$.

    (a) Determine o conjunto das vizinhanças de δ.

    (b) Determine o interior, o fecho e o derivado de Y.

    (c) Verifique se o espaço $(X, \mathcal{T})$

        i. é conexo;

        ii. é de Hausdorff;

        iii. é compacto.

130. Seja $\mathcal{T}$ a topologia cofinita num conjunto X.

    (a) Mostre que $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico T_1.

    (b) Verifique se $(X, \mathcal{T})$ é localmente conexo.

131. Seja $\mathcal{T}$ a família de subconjuntos de $\mathbb{N}$ da forma $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$, com $n \in \mathbb{N}$ e ainda os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{N}$.

   (a) Prove que $\mathcal{T}$ é uma topologia em $\mathbb{N}$.

   (b) Determine os conjuntos fechados em $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

   (c) Determine o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o derivado dos subconjuntos $A = \{3, 25, 36\}$ e $B = \{25, 50, 75\}$, de $\mathbb{N}$.

   (d) Indique os subconjuntos de $\mathbb{N}$ que são densos em $\mathbb{N}$.

   (e) Determine as vizinhanças do ponto 100.

   (f) Verifique se o espaço $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$

      i. é conexo;

      ii. é localmente conexo;

      iii. é de Hausdorff;

      iv. é compacto.

132. Seja $\mathcal{T}$ a topologia em $\mathbb{R}$ que tem como base $\mathcal{B} = \{]a, b]; a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

   (a) Determine o interior, o fecho e o conjunto dos pontos isolados de $[0, 1[$.

   (b) Verifique se a função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ com $f(x) = -x$ é contínua.

   (c) Verifique se $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

133. Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ o corpo dos números reais munido da topologia euclidiana $\mathcal{T}$. Considere

$$\mathcal{T}' := \{K \subseteq \mathbb{R} \ ; \ K = \emptyset \text{ ou } \mathbb{R} \setminus K \text{ é compacto em } (\mathbb{R}, \mathcal{T})\}.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{T}'$ é uma topologia em $\mathbb{R}$ estritamente menos fina do que $\mathcal{T}$.

   (b) Verifique se a função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}')$, com $f(x) = x + 1$, é contínua.

   (c) Verifique se $\{[-\delta, \delta] \mid \delta > 0\}$ é uma base de vizinhanças de 0 em $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$.

   (d) Mostre que o espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ não é de Hausdorff, mas é T_1.

   (e) Verifique se $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ é um espaço conexo.

   (f) O espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{T}')$ é compacto?

134. Considere, em $\mathbb{R}^2$, a topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}^2\} \cup \{U_r \ ; \ r > 0\}$, onde $U_r = \{(x, y) \ ; \ \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$.

   (a) Determine o interior e o fecho dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

      i. $A = \{(1, 0)\}$;

      ii. $B = \{(x, y) \ ; \ |x| \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$;

      iii. $C = \{(x, y) \ ; \ x \geq 1\}$.

   (b) Mostre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ não é compacto.

135. Para cada par de números reais a, b, considere $X_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > a \text{ e } y > b\}$, e sejam $\mathcal{A} = \{X_{a,b}; a, b \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{T}$ a topologia gerada por $\mathcal{A}$.

   (a) Mostre que $\mathcal{A}$ é uma base da topologia $\mathcal{T}$.

   (b) Determine o fecho e o interior em $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ de $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$.

   (c) Verifique se $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$

      i. é de Hausdorff;

      ii. é conexo;

      iii. é compacto.

136. Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos não vazios. Considere em $X \times Y$ a função

$$\begin{array}{rcl} d : (X \times Y) \times (X \times Y) & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & \max\{d_1(x, x'), d_2(y, y')\} \end{array}$$

(a) Mostre que d 'e uma métrica.

(b) Prove que $p_X : (X \times Y, d) \to (X, d_1)$ é uma aplicação uniformemente contínua.

(c) Mostre que uma sucessão $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ em $X \times Y$ converge para (x, y) se e só se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x em (X, d_1) e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y em (Y, d_2).

(d) Prove que o espaço métrico $(X \times Y, d)$ é completo se e só se (X, d_1) e (Y, d_2) são espaços completos.

137. Considere o espaço métrico $\mathcal{L}([0, 1], \mathbb{R})$ das funções limitadas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ (munido da métrica do supremo).

(a) Mostre que, se $h \in \mathcal{L}([0, 1], \mathbb{R})$, a sucessão (h_n), definida por $h_n(x) = h(x) \times \dfrac{n}{n+1}$ para todo o $x \in [0, 1]$ e todo o $n \in \mathbb{N}$, converge para h.

(b) Conclua que, se g é a função nula, então $\overline{B_1(g)} = B_1[g]$.

(c) Prove agora que, para todo o $g \in \mathcal{L}([0, 1], \mathbb{R})$ e para todo o $r > 0$, $\overline{B_r(g)} = B_r[g]$.

138. Sejam $A = \{a, b, c\}$, d a métrica discreta em A e d' a métrica definida da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} d' : A \times A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x = b \text{ e } y = c \text{ ou } x = c \text{ e } y = b \\ 2 & \text{nos outros casos.} \end{cases} \end{array}$$

Mostre que:

(a) d' é uma métrica em A;

(b) d e d' são uniformemente equivalentes;

(c) se $f : A \longrightarrow A$ é a função definida por $f(a) = b$, $f(b) = f(c) = c$, f é uma contracção para a métrica d, mas não para a métrica d'.

139. Sejam $\Phi(\mathbb{R})$ o conjunto dos subconjuntos não vazios, fechados e limitados de $\mathbb{R}$ e ρ a métrica de Hausdorff em $\Phi(\mathbb{R})$; isto é, para cada $A, B \in \Phi(\mathbb{R})$,

$$\rho(A, B) = \max\{\ \sup\{d(x, B) \,|\, x \in A\},\ \sup\{d(y, A) \,|\, y \in B\}\}.$$

(a) Calcule $\rho([-1, 0], [0, 1])$.

(b) Mostre que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $x_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, é de Cauchy.

(c) Verifique se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(d) Dê exemplo de uma sucessão neste espaço que não seja de Cauchy. Justifique.