Elementos de Toplogia
Exame Modelo 1A - 2002/2003

Duração: 2h 30m

1) Seja (X,τ) um expaço topológico qualquer. Dê um exemplo de um conjunto fechado X tal que $X' \neq X$.

2) Dê explicitamente o significado de cada uma das seguintes afirmações. Em cada explicação você está proibido de usar qualquer das palavras em *itálico* abaixo:
a) O conjunto $X \subset \mathbb{R}$ *não* é *aberto*;
b) X *não* é *compacto*.

3) Seja $C \subset \mathbb{R}$ compacto. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto contendo C. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que se $x \in C$ e $|y - x| < \varepsilon$ então $y \in A$.

4) Determine o interior, o exterior, o fecho, a fronteira e o conjunto derivado de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
a) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
b) $\mathbb{Q}$
c) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$

5) Prove que $\mathbb{R}$ não é compacto.

6) Dos conjuntos seguintes indique quais são conexos e quais são conexos por arcos:
a) $\mathbb{Q}$
b) $\{(x,y) \in R^2 | 2 \leq x^2 + y^2 < 4 \text{ e } |x| > 1\}$

7) Prove que um conjunto é aberto se e somente se for vizinhança de todos os seus pontos.

8) Indique, justificando, algumas propriedades notáveis da topologia grosseira definida num conjunto de mais de dois elementos.

9) Seja E_{1,y_0} a secção de $E = E_1 \times E_2$ no ponto $y_0 \in E_2$. Prove que a aplicação de E_1 em que E_{1,y_0} que a cada x de E_1 faz corresponder o ponto (x, y_0) de E_{1,y_0} é um homeomorfismo. Qual o significado desta afirmação?

10) Sejam (X,d) um espaço métrico completo e $f: X \to X$ uma aplicação tal que, para algum $i \in \mathbb{N}$, a aplicação $f^{(i)} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (i vezes) seja uma contracção. Prove que a aplicação f tem um, e um só, ponto fixo em X.