## Séries de potências

1. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ ; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ ; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n\,(x-3)^n}{n}$ ; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$ ;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n$ ; (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^{n+1}}{n+1}$ ; (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+1)^n}{n}$ ; (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ;

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n \ln^2 n}$ ; (j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ ; (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ ; (l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n (x+5)^n$ ;

(m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ ; (n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ ; (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1\,2\,3\,\ldots\,n}{1\,3\,5\,\ldots\,(2n-1)} x^{2n+1}$ ; (p) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{4^{2n}}$ ;

(q) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n (x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$ ; (r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{9^n}$ ;

2. Determine o intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{b^n}$, $b > 0$.

3. Mostre que, se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tem raio de convergência $r$, então a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$ tem raio de convergência $\sqrt{r}$.

## Séries de Taylor e de Maclaurin

4. Desenvolva em série de potências de $x$ as funções de expressões analíticas indicadas, e determine os intervalos de convergência das séries obtidas:

(a) $1/(1-x)$ ; (b) $1/(1+x)$ ; (c) $1/(1-x^2)$ ; (d) $1/(1+x^2)$ ;

(e) $1/(3+x)$ ; (f) $\ln(1-x)$ ; (g) $\arg\tanh x$ ; (h) $\arctan x$ ;

(i) $1/\sqrt{4-x^2}$ ; (j) $e^x$ ; (k) $3^{-x^2}$ ; (l) $\sin x$ ;

(m) $\cos x$ ; (n) $\sin 3x + x\cos 3x$ ; (o) $\arcsin x$ ; (p) $3/((1-x)(1+2x))$ ;

(q) $x \sinh x/(1-x^2)$ ; (r) $\cos x/\sqrt{1-x^2}$ ; (s) $\displaystyle\int_0^x \sin t/t\, dt$ ; (t) $\displaystyle\int_0^x 1/\sqrt{1-t^4}\, dt$ ;

(u) $\displaystyle\int_0^x (e^t-1)e^{-t}\, dt$ ; (v) $x/(x^2-4x+3)$ .

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ , se $x \neq 0$ , $f(0) = 0$ :

(a) Escreva o polinómio de Taylor de $f$ no ponto $x = 0$.

(b) Obtenha a série de Taylor de $f$ em 0, e verifique que o raio de convergência é infinito.

(c) Verifique que, salvo em $x = 0$, a função não coincide com a respectiva série de Taylor. O que pode concluir sobre $\lim_{n \to +\infty} R_n(x)$?

(d) Sabe-se também que, para cada $x \in \mathbb{R}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\xi_n(x) \in \,]0, x[$, tal que $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_n(x))}{(n+1)!}\, x^{n+1}$. O que pode concluir sobre a sucessão $(f^{(n+1)}(\xi_n(x)))$?

6. Desenvolva as seguintes funções em série de potências, determinando a região de convergência:

   (a) $\ln x$ segundo potências de $x - 1$. (b) $\sqrt{x}$ segundo potências de $x - 4$.

   (c) $e^x$ segundo as potências de $x + 2$.

7. Utilize os desenvolvimentos em série de MacLaurin de $e^x$, $\sin x$, $\cos x$ e $1/(1-x)$, e a igualdade $x = a + (x - a)$, para determinar os desenvolvimentos em série de Taylor para $x = a$:

   (a) $e^x$; (b) $\sin x$. (c) $1/x$.

8. Determine o desenvolvimento em série, segundo potências de $x$, de:

   (a) $\sqrt{e^x}$; (b) $1/(2 + x)$.

9. Determine os desenvolvimentos em série das funções, indicando $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$, de:

   (a) $f(x) = \ln(1 + 3x)$; (b) $f(x) = \ln(1 + 3x) - 1/\sqrt{1 - x^2}$.

10. Mostre, usando desenvolvimentos em série de Maclaurin apropriados, que:

    (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$; (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!} = 1$;

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} = -1$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. Considere o desenvolvimento em série de potências $\displaystyle \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\,3\,5\ \dots\ (2n-1)}{2\,4\,6\ \dots\ (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

    (a) Verifique que o desenvolvimento em série de potências indicado pode ser escrito na forma $\displaystyle \arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

    (b) Determine o raio de convergência.

    (c) Determine o intervalo de convergência.

    (d) Mostre que $\displaystyle \frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$.

12. Usando séries de Maclaurin, prove as seguintes igualdades:

    (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$; (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}$.

13. Determine as seguintes primitivas:

    (a) $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$; (b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$; (c) $\displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\, dt$.

14. Determine os seguintes integrais definidos, apresentando o resultado na forma de uma série numérica:

    (a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx\,;$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{sin}x\,dx\,.$

**Aplicação de séries de potências à resolução de equações diferenciais**

15. Resolva as seguintes equações diferenciais, apresentando o resultado em série de potências:

    (a) $y'' + xy' + y = 0$;

    (b) $y'' + x^2y' + 2xy = 0$, sujeita às condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

    (c) $y'' - y = 0$;

    (d) $y'' + y = 0$.

    (e) $y'' + x^2y = 0$, sujeita às condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1$.

**Equações Diferenciais de Primeira Ordem**

16. Usando o método de separação de variáveis, resolva as seguintes equações diferenciais:

    (a) $y' = (x+1)^2\,;$ (b) $y\,\ln\,x\,x'(y) = (y + 1/x)^2\,;$

    (c) $e^x\,y\,y' = e^{-y} + e^{-2x-y}\,;$ (d) $y' = ((2y+3)/(4x+5))^2$.

17. (a) Mostre que a função $y$, definida implicitamente pela equação $x^2 + 2\,y^2 = 1$, é solução da equação diferencial $y' = x\,y/(x^2-1)$.

    (b) Mostre que a função $y$, definida implicitamente pela equação $2\,y^2\,\ln\,y - x^2 = 0$, é solução da equação diferencial $y' = x\,y/(x^2+y^2)\,.$

18. Determine a solução dos seguintes problemas, na forma implícita e na forma explícita:

    (a) $\sqrt{1-y^2}\,dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $y(0) = \sqrt{3}/2$ (b) $\left(1+x^4\right)\,dy + x(1+4y^2)\,dx = 0$, $y(1) = 0$

19. Determine a solução da equação $x\,y' = y^2 - y$, que passa no ponto:

    (a) $(0,1)\,;$ (b) $(0,0)\,;$ (c) $(1/2,1/2)\,;$ (d) $(2,1/4)$.

20. Muitas vezes uma pequena alteração, seja na condição inicial ou na própria equação, provoca uma mudança radical na solução de uma equação diferencial. Determine a solução explícita de cada um dos seguintes problemas de valor inicial, e compare, graficamente, as soluções obtidas nas vizinhanças de $(0,1)$:

    (a) $y' = (y-1)^2,\quad y(0) = 1\,;$ (b) $y' = (y-1)^2 + 0.01,\quad y(0) = 1\,;$

    (c) $y' = (y-1)^2,\quad y(0) = 1.01$ (d) $y' = (y-1)^2 - 0.01,\quad y(0) = 1$.

21. Verifique se as seguintes equações são exactas. Em caso afirmativo, determine a solução geral:

    (a) $2\,t\,y\,dt + \left(t^2-1\right)\,dy = 0\,;$

    (b) $\left(e^{2y} - y\,\cos\,(t\,y)\right)\,dt + \left(2\,t\,e^{2y} - t\,\cos\,(ty) + 2\,y\right)\,dy = 0\,;$

(c) $\left(\cos y \, \sin t - t \, y^2\right) \, dt + y \, \left(1 - t^2\right) \, dy = 0\,;$

(d) $(2\,t + y)\,dt - (t + 6\,y)\,dy = 0\,;$

(e) $(2\,y - 1/t + \cos 3\,t)\,y'(t) + yt^{-2} - 4\,t^3 - 3\,y\,\sin 3\,t = 0\,;$

(f) $(1 + \ln\,t + y/t)\,dt = (1 - \ln\,t)\,dy\,;$

(g) $x\,dx + y\,dy = (x\,dy + y\,dx)/(x^2 + y^2)\,.$

22. Determine uma função $M$ de tal forma que a seguinte equação diferencial seja exacta
$$M(t,x)\,dt + \left(t\,e^{tx} + 2\,t\,x + 1/t\right)\,dx = 0\,.$$

23. Resolva as seguintes equações diferenciais usando o factor integrante $u$ indicado:

(a) $(t + x)\,dt + t\,\ln\,t\,dx = 0, \quad u(t,x) = 1/t\,;$

(b) $(-t\,x\,\sin t + 2\,x\,\cos t)\,dt + 2\,t\,\cos t\,dx = 0, \quad u(t,x) = t\,x.$

24. Mostre que cada uma das seguintes equações diferenciais admite um factor integrante $u$ função apenas de uma das variáveis. Determine $u$, e use-o para resolver a equação.

(a) $y^2/2 + 2\,y\,e^t + \left(y + e^t\right)\,y' = 0\,;$

(b) $y/x\,dx + \left(y^3 - \ln\,x\right)\,dy = 0\,;$

(c) $\left(x + y^2\right)\,dx - 2\,x\,y\,dy = 0\,;$

(d) $y' + 2/x\,y = 6\,x^3\,.$

25. Mostre que uma equação do tipo $y' + p(x)\,y = q(x)$ com $p$ e $q$ funções contínuas nalgum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, admite um factor integrante da forma $e^{P(x)}$, com $P$ uma primitiva de $p$ em $I$.

26. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem, indicando o maior intervalo onde está definida a solução:

(a) $x^2\,y' + xy = 1\,;$

(b) $y\,dx = (y\,e^y - 2x)\,dy\,;$

(c) $x\,y' - y = x^2\sin\,x\,;$

(d) $(x^2 - 1)\,y' + 2y = (x + 1)^2\,.$

27. Determine uma solução contínua para os seguintes problemas de valor inicial, e represente-a graficamente:

(a) $y' + 2y = f(x)\,, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ 0 & \text{se } x > 3 \end{cases}\,, \quad y(0) = 0;$

(b) $(x^2 + 1)\,y' + 2\,x\,y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x < 1 \\ -x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}\,, \quad y(0) = 0\,.$

28. Determine uma solução contínua para o problema de valor inicial $y' + P(x)\,y = 4\,x, \quad y(0) = 3,$ onde $P(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ -2/x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, e represente-a graficamente.

29. Escreva uma equação diferencial linear de primeira ordem cujas soluções admitam a recta de equação $y = 3x - 5$, por assímptota, quando $x \to +\infty$.

30. Escreva uma equação diferencial linear de primeira ordem, que admite $Y_p = x^3$ por solução particular, e tendo em conta que $Y_H = C/x^3$ é solução geral da equação homogénea associada.

31. Considere uma *equação diferencial* do tipo $y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$, $n \neq 1$ e $n \neq 0$, dita *de Bernoulli*, com $p$ e $q$ funções contínuas nalgum intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

    (a) Mostre que, efectuando a mudança de variável, definida por $y^{1-n} = z$, com $n \neq 1$ se obtém uma equação diferencial linear de primeira ordem.

    (b) Em cada uma das seguintes alíneas, verifique que a equação é do tipo referido na alínea anterior. Determine a solução geral fazendo a mudança de variável indicada:

    i. $y' + 1/x\, y = x^2\, y^2,\ x > 0$; ii. $y' - y = e^x/y$;
    iii. $y' = \left[(1-2\,t)\, y^4 - y\right]/3$; iv. $\left(1-x^2\right)\, y' - x\, y - x\, y^2 = 0$.

32. Considere a seguinte equação diferencial de primeira ordem $y' = (x+y)/(x-y)$.

    (a) Prove que, efectuando uma mudança de variável definida por $y = x\, z$, a equação dada reduz-se a uma equação de variáveis separáveis. Resolva a equação obtida, e determine em seguida a solução geral da equação dada.

    (b) Escreva a equação diferencial que se obtém efectuando a mudanças de variável definidas por $x = \rho\, \cos\theta$, $y = \rho\, \sin\theta$. Resolva a equação obtida e determine a solução geral da equação dada.

33. Considere a equação diferencial $y = x\, y' + (y')^2$.

    (a) Mostre que, cada elemento da família de funções $y = C\, x + C^2$, $C \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação diferencial dada.

    (b) Determine $k \in \mathbb{R}$ de forma que $y = k\, x^2$ seja solução da equação diferencial dada.

    Para os valores de $k$ determinados obtêm-se soluções que não verificam a forma da solução geral, $y = C\, x + C^2$. Estas *soluções* dizem-se *singulares*.

34. A equação diferencial ordinária, $y' = f\,(t, y)$ diz-se *homogénea* se $f\,(\lambda t, \lambda y) = f\,(t, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

    (a) Prove que se $y' = f\,(t, y)$ é uma equação diferencial ordinária homogénea, é possível escrevê-la na forma $y' = g\,(y/t)$.

    (b) Prove que efectuando a mudança de variável dependente, definida por $y/t = z$, a equação dada transforma-se numa equação de variáveis separáveis.

35. Prove que as seguintes equações diferencia são homogéneas e determine as suas soluções gerais:

    (a) $2\, t^2 + y^2 - t\, y\, y' = 0$. (b) $t\, y' = y + t\, e^{y/t}$.
    (c) $(y' - y/x)\, \ln y/x = 1$. (d) $(t-y)\, dt + (t+y)\, dy = 0$.

36. Identifique e em seguida resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias:

    (a) $t^2 y' + y = 1$. (b) $y'/\sqrt{4-y^2} + t^2/(1+t^2) = 0$.
    (c) $y' + \sin\,(t + y/2) = \sin\,(t - y/2)$. (d) $x^2\, y' + x\, y + 2\, y^2 = 0$.
    (e) $y' - 2\, y\, e^t = 2\,\sqrt{y}\, e^t$. (f) $x\, dy - y^2 dx = y\, dx$.
    (g) $y/x + \sin\, y/x = y'$. (h) $3\, t\, y^2 y' - 2\, y^3 = t^3$.

37. (a) Mostre que, efectuando uma mudança de variável definida por, $u = y'$, a equação $y'' = 2\,x\,(y')^2$ reduz-se a uma equação diferencial de primeira ordem. Resolva-a e determine, em seguida, a solução geral da equação dada.

    (b) Resolva a equação diferencial $y^2\,y'' = y'$, depois de efectuar a mudança de variáveis, definida por $u = y'$.

38. Escreva e classifique a equação diferencial que se obtém, depois de efectuar, a mudança de variável, definida por $x = \sin t$, na equação $\left(1 - x^2\right)\, y'' - x\,y' + y = 0$.

39. Escreva e classifique a equação diferencial que se obtém, depois de efectuar, a mudança de variável, definida por $3\,x + 2 = e^t$, na equação $(3\,x+2)^2\, y'' + 3\,(3\,x+2)\,y' - 36\,y = 3\,x^2 + 4\,x + 1$.

40. (Crescimento demográfico) A taxa de crescimento de uma população, $a$, é a soma das taxas de natalidade, $n$, e migração, $g$, menos a taxa de mortalidae, $m$, i.e. $a = n + g - m$. O crescimento da população num instante dado é igual ao produto da população nesse instante pela a taxa de crescimento da população; se a população no instante $t$ for representada pela função $P$, o crescimento da população será também igual à derivada de $P$, i.e $P'(t) = a\,P(t)$.

    (Modelo de Malthus) Neste caso a taxa de crescimento da população, $a$, é constante; a equação diferencial resultante é, portanto, uma equação de variáveis separáveis. O número inicial de bactérias numa cultura é 600 e aumenta para 1800 em duas horas. Supondo que a taxa de variação do número de bactérias é directamente proporcional ao número de bactérias presente, determine o número de bactérias ao fim de 4 horas.

    (Modelo Logístico) Neste caso considera-se que a taxa de mortalidade é directamente proporcional à população presente, com taxas de natalidade e migração constantes. A taxa de crescimento da população $P$ é então $b - k\,P$, com $b$ e $k$ constantes. A equação diferencial que descreve o crescimento de uma população nestas condições é $P'(t) = b\,P(t) - k\,P^2(t)$.

    Admitamos que a população de Lisboa, $P$, verifica em cada momento, a equação diferencial $P'(t) = P(t)/25 - P^2(t)/(25.10^6)$. Supondo que em 1980 existiam em Lisboa $8.10^6$ habitantes calcule o número de habitantes em 2010.

41. (Problemas de aquecimento e arrefecimento) Entre dois corpos em contacto existe transferência de calor por condução, do corpo mais quente para o mais frio. Se a temperatura do objecto em qualquer instante é $T$ e a temperatura do meio ambiente é $M$, a taxa de variação da temperatura do objecto em qualquer instante será directamente proporcional à diferença entre a temperatura do objecto e a do meio ambiente $T'(t) = k\,(M(t) - T(t))$, onde $k$ é uma constante de condução térmica.

    Um objecto metálico à temperatura de $100^0\,C$ é mergulhado em água. Ao fim de cinco minutos a temperatura do objecto desceu para $60^0\,C$. Determine o instante em que a temperatura do objecto é de $31^0\,C$, sabendo que a água é mantida a $30^0\,C$.

42. (Problemas de cinética química) Uma bola de naftaleno de forma esférica, evapora-se de modo tal que o volume diminui a uma taxa proporcional à área da sua superfície. Suponha que a bola tem um raio inicial de 1 $cm$ e que passados três meses observa-se que o raio é de $0,5\ cm$. Determine quanto tempo levará a bola de naftaleno a evaporar-se completamente.

43. (Trajectórias ortogonais) Uma curva que intersecta ortogonalmente cada elemento de uma família de curvas diz-se uma *trajectória ortogonal* à dita família. Suponhamos que a família de curvas é definida pela relação $y = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$, onde $f$ é função real de variável real diferenciável. Determine uma equação diferencial ordinária a que estão sujeitas as trajectórias ortogonais desta família.

44. Determine as trajectórias ortogonais das famílias de curvas seguintes:

    (a) $y = k\,x^2$. (b) $y = (x+k)^{-1}$. (c) $x^2 - y^2 = k$. (d) $y = k\,e^{-x}$.

45. (Circuitos eléctricos) Num circuito eléctrico, *(C-RB)*, constituído por um gerador (G), que, em cada instante $t$ produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ ampères (A), por uma resistência de $R$ ohms ($\Omega$) e por uma bobina (B) que gera uma indutância de $L$ henrys (H), tem-se que, a diferença de potencial nas extremidades da bobina é dada por $V_B(t) = L\,I'(t)$ e a diferença de potencial nas extremidades da resistência é dada por $V_R(t) = R\,I(t)$. Então, de acordo com uma das leis de Kirchhoff, quando for fechado o interruptor, obtém-se $V_B(t) + V_R(t) = E(t)$, ou seja $L\,I'(t) + R\,I = E(t)$. Se o circuito eléctrico, *(C-RC)*, for constituído por um gerador (G), que, em cada instante $t$ produz uma voltagem de $E(t)$ volts (V) e uma corrente de $I(t)$ ampères (A), por uma resistência de $R$ ohms ($\Omega$) e por um condensador (C) com capacitância de $C$ farads (F) e que gera uma carga de $Q(t)$ coulombs, tem-se que, a diferença de potencial nas extremidades do condensador é dada por $V_C(t) = Q/C$. Tendo em conta que $I = Q'(t)$, de acordo com uma das leis de Kirchhoff, quando for fechado o interruptor, obtém-se $V_C(t) + V_R(t) = E(t)$, ou seja $R\,Q'(t) + Q/C = E(t)$.

    Suponha que num circuito *(C-RC)* a resistência é de $5\,\Omega$, a capacitância de $0.05\,F$ e o gerador fornece uma voltagem constante de $60\,V$.

    (a) Escreva uma equação diferencial que descreva a variação da carga no circuito ao longo do tempo e resolva-a.

    (b) Se a carga inicial for $Q(0) = 0\,C$, determine o seu valor passados 2 s.

46. Suponha que num circuito *(C-RB)* a resistência é de $12\,\Omega$, a indutância de $4\,H$ e o gerador fornece uma voltagem constante de $60\,V$.

    (a) Escreva uma equação diferencial que descreva a variação da intensidade da corrente no circuito ao longo do tempo e resolva-a.

    (b) Se a intensidade inicial for $I(0) = 0\,A$, determine o seu valor passados 10 s.

## Equações Diferenciais Linerares

47. Verifique se as funções $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{2x}$ constituem um sistema fundamental de soluções para as seguintes equações diferenciais:

    (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (b) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

48. (a) Mostre que as funções $x_1(t) = \cos(\omega\,t)$ e $x_2(t) = \sin(\omega\,t), \quad \omega \neq 0$, constituem um sistema fundamental de soluções para a equação $x''(t) + \omega^2\,x(t) = 0$.

(b) Determine a solução particular da equação referida na alínea anterior, que satisfaz as seguintes condições iniciais $x(0) = 1$ e $x'(0) = \omega$.

49. Determine o integral geral das seguintes equações diferenciais lineares de coeficientes constantes e, nos casos indicados, determine o integral particular que verifica as condições iniciais dadas:

(a) $y'' - y' - 2y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 3\,.$

(b) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y''(0) = -3\,.$

(c) $x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) = 0\,, \quad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = 6 = x''(0)\,.$

(d) $((D-1)^2 + 1)y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(\pi/2) = e^{\pi/2}\,.$

(e) $y^{(4)} + y^{(2)} = 0.$ (f) $y^{(4)} = y.$ (g) $(D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0.$

(h) $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0.$ (i) $y^{(n+2)} + y^{(n)} = 0.$ (j) $y^{(n+1)} + y^{(n)} = 0.$

(k) $y^{(n+2)} = y^{(n)}.$ (l) $((D+1)^2 + 4)^2 y = 0.$

50. Escreva uma equação diferencial linear de terceira ordem, homogénea, com coeficientes constantes, sabendo que o polinómio característico associado admite 4 por raíz simples e $-5$ por raíz dupla.

51. O polinómio característico associado a uma equação diferencial linear, homogénea, com coeficientes constantes, tem as raízes $-1/2$ e $3 + i$. Escreva uma equação nessas condições.

52. (a) Escreva uma equação diferencial linear, homogénea, de coeficientes constantes, de ordem mínima que admite as funções $y_1 = x$ e $y_2 = e^x$ por soluções particulares.

(b) Determine a solução particular da equação da alínea anterior, que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 1$ , $y'(0) = -1$ e $y''(0) = 1$.

53. Considere o seguinte problema com valores de fronteira: $y'' + \lambda\, y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y\,(\pi/2) = 0\,.$ Determine os valores de $\lambda$ para os quais o problema dado tem solução não trivial.

54. Determine uma equação diferencial linear, homogénea, de coeficientes constantes e de ordem mínima e que admite a seguinte solução particular:

(a) $y = 4e^{2x} + 3e^{-x}\,;$ (b) $y = 6xe^{2x}\sin 3x\,;$

(c) $y = 7 + 2x + 5e^{3x}\,;$ (d) $y = 6 + 3xe^{x}\cos x\,;$

(e) $y = 2x + 5xe^{3x}\,;$ (f) $y = x^2 - 5\sin 3x\,;$

(g) $y = 4 + 2x^2 - e^{-3x}\,;$ (h) $y = 3/4\sin x - 1/4\sin 3x\,;$

(i) $y = 4e^{-x}\sin 2x\,;$ (j) $y = xe^{-x}\sin 2x - 3e^{-x}\cos 2x\,;$

### Equações não homogéneas. Método do polinómio anulador e de Lagrange.

55. Usando o método do polinómio anulador, integre as seguintes equações diferenciais completas de coeficientes constantes:

(a) $y'' - 9\,y = e^{3x}\,;$ (b) $y''' - 4\,y'' + 5\,y' - 2\,y = 2x + 3\,;$

(c) $y'' - y' - 6\,y = e^{3x}\sin 2x\,;$ (d) $y'' + 4\,y = \sin^2 2x\,;$

(e) $y''' - y' = 3(2 - x^2)\,;$ (f) $y'' - y = 3e^{2x}\cos x\,;$ (g) $y'' + y = xe^{x} + 2e^{-x}.$

56. (a) Determine a solução geral da equação $y''' + 4\,y' = \cos x$ .

    (b) Sabendo que $e^{x^2}$ é uma solução particular da equação $y''' + 4\,y' = f(x)$, determine:
    i. o integral geral de $y''' + 4\,y' = 2\,f(x) - 3\cos x$ ; ii. a função $f(x)$.

57. Determine o integral geral da equação diferencial $y''+y = \cos x$ , sabendo que $x\sin x/2$ é um integral particular dessa mesma equação.

58. Resolva o seguinte problema de valor inicial $y''+4y = g(x)\,,\ \ y(0) = 1\,,\ \ y'(0) = 2$ , onde $g(x) = \sin x$ , $x \in [0, \pi/2]\,,\ \ g(x) = 0\,,\ \ x > \pi/2$ .

59. Utilizando o método da variação das constantes arbitrárias (método de Lagrange), encontre os integrais gerais das seguintes equações diferenciais:

    (a) $y'' + y = \sec\, x$ ; (b) $y'' - 4y = e^{2x}/x$ ;

    (c) $y'' + 3y' + 2y = \sin\, e^x$ ; (d) $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$ .

60. (a) Resolva o seguinte problema de valor inicial $y''-4y'+4y = \sin\, x\,,\ \ y(0) = 0\,,\ \ y'(0) = 1\,,\ \ x \in \mathbb{R}$ .

    (b) Determine o integral geral de $y'' - 4y' + 4y = 25\sin\, x + e^{2x}/x\,,\ \ x > 0$ .

61. (a) Construa uma equação diferencial linear, de terceira ordem, com coeficientes constantes e completa, que admita $y_1(x) = x + \ln\, x$ e $y_2(x) = \ln\, x$ por soluções particulares, e sabendo que $y_3(x) = e^{2x}$ é uma solução particular da equação homogénea associada.

    (b) Determine a solução geral dessa equação diferencial.

62. Uma *Equação diferencial de Euler* é uma equação diferencial linear da forma
    $$a_n\,x^n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,x^{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1\,x\,y' + a_0\,y = g(x)\,,\quad x \in I\,,$$
    onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais, $g$ é uma função contínua em $I$ e $I \subseteq ]\,0, +\infty\,[$ ou $I \subseteq ]-\infty, 0\,[$. Uma equação deste tipo, é uma equação de coeficientes variáveis que se pode transformar numa equação diferencial linear de coeficientes constantes efectuando uma mudança de variável independente adequada.

    Se $I \subseteq ]\,0, +\infty\,[$ faz-se a mudança de variável definida por $x = e^t$ .

    Se $I \subseteq ]-\infty, 0\,[$ faz-se a mudança de variável definida por $x = -e^t$ .

    Considere a equação diferencial $x^2\,y'' + 10\,xy' + 8\,y = x^2\,,\ \ x < 0$ .

    (a) Classifique-a;

    (b) Efectue a mudança de variável definida por $x = -e^t$ e resolva a equação obtida.

    (c) Escreva a solução geral da equação dada.

63. Considere a equação diferencial $x^2\,y''' + xy'' - y' = \ln\, x\,,\ \ x > 0$ .

    (a) Classifique-a;

    (b) Efectue a mudança de variável definida por $y' = z$ .

    (c) Na equação obtida na alínea anterior, efectue a mudança de variável definida por $x = e^t$ e resolva a equação obtida.

(d) Escreva a solução geral da equação dada.

64. Considere a equação diferencial $x^3\,y''' - 6\,x^2\,y'' + 15\,x\,y' - 15\,y = 0$.

   (a) Mostre que esta equação admite um sistema fundamental de soluções com funções da forma $x^m, \quad m \in \mathbb{Z}$.

   (b) Determine a solução da equação dada que satisfaz as seguintes condições $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$.

**Método de abaixamento de ordem ou de D'Alembert.**

65. Utilizando o método do abaixamento de ordem (método de d'Alembert), encontre os integrais gerais das seguintes equações diferenciais, sabendo que as equações homogéneas associadas admitem os integrais particulares, $y_i$, indicados:

   (a) $x\,y'' - y' = 0$;

   (b) $x\,y'' - y' = x^2 e^x$;

   (c) $x\,y'' + 2\,y' - x\,y = -e^x$, com $y_1(x) = e^x/x$;

   (d) $(2-x)\,y''' + (2\,x-3)\,y'' - x\,y' + y = 0, \quad x < 2$, com $y_1(x) = e^x$;

   (e) $x\,y'' - (1+x)\,y' + y = x^2\,e^{2\,x}, \quad x > 0$, com $y_1(x) = 1 + x$;

   (f) $x^2\,(x+3)\,y''' - 3\,x\,(x+2)\,y'' + 6\,(1+x)\,y' - 6\,y = 0, \quad x > 0$, com $y_1(x) = x^2$.

   (g) $x^3\,y''' - 6\,x^2\,y'' + 15\,x\,y' - 15\,y = 0, \quad x > 0$, com $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^3$.

**Questões variadas relativas a equações diferenciais lineares de ordem $n$.**

66. Em todas as alíneas as funções apresentadas são soluções de determinadas equações diferenciais lineares homogéneas em certos intervalos. Averigúe se cada um dos sistemas de soluções é um sistema fundamental de soluções para uma equação diferencial linear homogénea num certo intervalo, e determine essa equação e o correspondente intervalo:

   (a) $\{2, x-4, x^2\}$;

   (b) $\{x^3, x^4\}$;

   (c) $\{e^x, e^{3x}, e^{5x}\}$;

   (d) $\{2, x+2, x-4\}$;

   (e) $\{x-1, \sin x, \cos x\}$;

   (f) $\{1, x, \sin x, \cos x\}$;

   (g) $\{x, \ln\, x\}$;

   (h) $\{x^2, x-1/2, (x-1)^2\}$;

   (i) $\{e^x, \sinh\, x, \cosh\, x\}$;

   (j) $\{1, x, 1/x, \}$.

67. Considere a equação diferencial $(1-x^2)\;y'' - xy' = 0$.

   (a) Classifique-a;

   (b) Efectue a mudança de variável definida por $x = \cos t$ e resolva a equação obtida.

   (c) Escreva a solução geral da equação dada.

68. Determine:

(a) Para $x > e$, funções $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $f(x)$ de tal modo que $1$ , $1+x$ e $1+\log x$ sejam integrais particulares de $y'' + a_0(x)\, y' + a_1(x)\, y = f(x)$ ;

(b) O integral geral da equação diferencial obtida na alínea anterior, justificando convenientemente.

69. Sabendo que a equação diferencial $x^2\, y'' + x\, y' - y = 8x^3$ , admite como soluções particulares $x^3$ e $x^3 + 1/x$, determine o seu integral geral.

70. Considere a seguinte equação diferencial $\begin{vmatrix} x^2 & x & y \\ 0 & 1 & y' \\ 1 & 0 & y'' \end{vmatrix} = (x^2 + x - 1)\, e^x$ . $\qquad (*)$

(a) Mostre que $e^x$ e $e^x + 1/x$ são duas soluções particulares de $(*)$ ;

(b) Conclua, a partir da alínea anterior, que $1/x$ é uma solução particular da equação diferencial homogénea associada a $(*)$ ;

(c) Mostre que $\{x, 1/x\}$ é um sistema fundamental de soluções para a equação homogénea associada a $(*)$ ;

(d) Indique a solução geral de $(*)$.

71. Considere a seguinte equação diferencial, $e^x\,(x-1)\, y'' - x\, e^x\, y' + e^x\, y = e^{2x}(x-1)^2$ .

(a) Mostre que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = e^x$ são soluções da equação homogénea associada à equação dada.

(b) Determine a solução geral da equação dada.

72. (a) Mostre que o conjunto $\left\{x^3, x^4\right\}$ é, no intervalo $]0, +\infty[$ , um sistema fundamental de soluções para uma equação diferencial linear homogénea de segunda ordem.

(b) Escreva uma *equação diferencial linear não homogénea* cuja solução geral é $y(x) = c_1\, x^3 + c_2\, x^4 + \ln\, x, \quad x > 0$ .

(c) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial
$$x^2\, y'' - 6\, x\, y' + 12\, y = 12\, \ln\, x - 7\,, \quad y(1) = 0\,, \quad y'(1) = 1\,.$$

73. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $z'' + z = e^{x+1}$ .

(b) Indique duas soluções particulares da seguinte equação diferencial $z'' + z = 3\, e^x$ .

## Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

74. Escreva cada um dos sistemas diferenciais seguintes na forma matricial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + F$:

(a) $\begin{cases} y_1' &= -3\, y_1 + 4\, y_2 - 9\, y_3 \\ y_2' &= 6\, y_1 - y_2 \\ y_3' &= 10\, y_1 + 4\, y_2 + 3\, y_3 \end{cases}$ . $\qquad$ (b) $\begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2 + y_3 + t - 1 \\ y_2' &= 2\, y_1 + y_2 - y_3 - 3\, t^2 \\ y_3' &= y_1 + y_2 + y_3 + t^2 - t + 2 \end{cases}$ .

75. Escreva cada um dos sistemas seguintes sem recorrer à forma matricial:

(a) $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$ .

(b) $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -9 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} - \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}$.

76. Considere a seguinte sistema de equações diferenciais $x_1' = -2x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 - 2x_2$. Resolvendo a primeira equação em ordem a $x_2$ e substituindo na segunda, obtém-se uma equação diferencial linear de segunda ordem em $x_2$. Resolva esta equação e determine em seguida a solução do sistema que satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = 3$.

77. Transforme cada um dos seguintes sistemas diferenciais numa equação diferencial de segunda ordem. Em seguida determine a solução que satisfaz as condições iniciais indicadas:

(a) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = 1/2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}$.

78. (a) Seja $y$ uma solução da equação diferencial $y'' + y' + y = 0$. Mostre que $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ é solução do sistema diferencial $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

(b) Seja $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ solução do sistema diferencial $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. Mostre que $y(t) = x_1(t)$ é solução da equação diferencial $y'' - 4y' + 3y = 0$.

79. Transforme cada um dos seguintes sistemas diferenciais numa equação diferencial linear homogénea com coeficientes constantes. Indique um sistema fundamental de soluções e escreva a solução geral do sistema dado:

(a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$. (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

80. Mostre que o sistema diferencial $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, admite o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} & 0 \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} 0 & e^{4t} & e^{4t} \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 & e^{6t} \end{bmatrix}^t \right\},$$

como sistema fundamental de soluções. Escreva a sua solução geral.

81. Determine a solução geral dos seguintes sistemas diferenciais:

(a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$; (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$; (c) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;

(d) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$; (e) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$; (f) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;

(g) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$; (h) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$; (i) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;

(j) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

82. Mostre que se $A$ é uma matriz diagonal, i.e., $A = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, então $e^{A\,t} = Diag(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.

83. Uma matriz $A$ diz-se *nilpotente* se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Determine a função matriz exponencial de cada uma das seguintes matrizes nilpotentes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

84. Em cada uma das alíneas seguintes, mostre que existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que a matriz $A - \lambda I$ é nilpotente. Use este resultado para determinar $e^{A\,t}$:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

85. Determine a solução geral dos seguintes sistemas diferenciais:

(a) $\begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= 2\,x_3 \\ x_3' &= 4\,x_1 - 6\,x_2 + 6\,x_3 \end{cases}$; (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;

(c) $\begin{cases} x_1' &= -x_1 - 4\,x_2 \\ x_2' &= x_1 + 3\,x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{cases}$; (d) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

86. Determine a solução geral das equações diferenciais seguintes, depois de as reduzir a um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$:

(a) $y''' - 2\,y'' + y' = 0$. (b) $2\,y'' + 2\,y' - y = 0$.

(c) $y''' - 2\,y'' - y' + 2\,y = 0$. (d) $y'' - 3\,y' + 2\,y = 0$ .

87. Determine a solução geral dos sistemas diferenciais seguintes, depois de os ter reduzir a um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$:

(a) $\begin{cases} y_1'' + y_2 &= 0 \\ y_1' + y_2' &= 0 \end{cases}$. (b) $\begin{cases} y_1'' - 2\,y_1' + y_1 &= 0 \\ y_2' + y_1 &= 0 \end{cases}$.

88. (a) Resolva problema de valor inicial $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}.$

 (b) Mostre que, se $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, então $e^{\lambda\,(t-t_0)}\mathbf{v}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, é solução de $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$.

 (c) Resolva o seguinte problema de valor inicial $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y}(-3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}.$

89. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; (d) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

90. Determine $e^{A\,t}$ sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

(g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$; (h) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

91. Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4\,e^{t}\cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{2\,t} \\ 0 \\ e^{2\,t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

92. Para cada um dos sistemas seguintes, determine uma solução particular $\mathbf{y}(t)$ da forma $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda\,t}(\mathbf{a}\,t + \mathbf{b})$, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vectores constantes:

(a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + e^{2\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + e^{8\,t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

## Transformadas de Laplace. Aplicações.

93. A partir da definição de transformada de Laplace, mostre que:

    (a) $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ ; (b) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)\,, \quad s > a$ ; (c) $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}\,, \quad s > 0\,, \quad n \in \mathbb{N}$ ;
    (d) $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = s/(s^2+\omega^2)\,, \quad s > 0$ ; (e) $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \omega/(s^2+\omega^2)\,, \quad s > 0$ .

94. Mostre que se $f(t) = t^{-1/2}$ então $\mathcal{L}\{f(t)\} = \sqrt{\pi}/\sqrt{s}\,, \quad s > 0$ .

95. Mostre que $f(t) = e^{t^2}$ não admite transformada de Laplace.

    **Sugestão**: Tenha em conta que $e^{t^2-st} > e^t$ para $t > s+1$.

96. Determine as transformadas de Laplace das funções definidas pelas seguintes expressões analíticas:

    (a) $a(t) = e^{3t}\cos 2t$ ; (b) $b(t) = \cos^2 at$ ; (c) $c(t) = \sin 5t \, \cos 2t$ ;
    (d) $d(t) = t^2 \sin t$ ; (e) $e(t) = t^3 \, e^{-t}$.

97. Determine a transformada de Laplace da seguinte função: $f(t) = t^{5/2},\ t \in [0, +\infty[$.

98. (a) Seja $F(s) = L\{f(t)\}$. Supondo que $f(t)/t$ tem limite quando $t \to 0$, prove que:
    $$L\{f(t)/t\} = \int_s^{+\infty} F(u)\mathrm{du}\,.$$
    (b) Determine a transformada de Laplace de cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões analíticas:
    i. $\sin t/t$ ; ii. $(\cos(at)-1)/t$ ; iii. $(e^{at}-e^{-at})/t$ .

99. Calcule:

    (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{(s-2)^{-2}\right\}$ ; (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{7/(s-1)^3 + 1/((s+1)^2-4)\right\}$ ;
    (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}/(s^2+16)\right\}$ ; (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan(4/s)\right\}$.

100. Use o operador Transformada de Laplace para determinar as soluções das seguintes equações diferenciais que verifiquem as condições iniciais dadas:

    (a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-x}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1$ . (b) $y'' + 4y' + 3y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1$ .
    (c) $y'' + 6y - 7 = 0\,, \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$ . (d) $y'' - y' - 2y = x\,, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$ .
    (e) $y'' - 2y' + 5y = 0\,, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$ . (f) $y'' - 9y' = 5e^{-2t} \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2$ .
    (g) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{3t}\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0$ . (h) $y'' + 4y = 9t\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 7$ .
    (i) $y'' + y = \cos t\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = -1.$
    (j) $y''' - 4y' = \mathrm{sinh} t\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\,,\ y''(0) = 0.$
    (k) $y'' + y' - 2y = 5e^{-t}\sin 2t\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0.$
    (l) $y^{(iv)} - k^4 y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,,\ y''(0) = 0\,,\ y'''(0) = 0.$

101. Utilizando o operador Transformada de Laplace, determine a solução geral de cada uma das seguintes equações:

    (a) $y' + 2y = e^t$ ; (b) $y'' + 4y' + 3y = 0.$

102. Usando a Transformada de Laplace, resolva o problema: $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$, $y(1) = 1$ e $y'(1) = 0$.
**Sugestão**: Faça uma mudança de variável conveniente.

103. Determine a solução do problema: $ty'' - ty' - y = 0$, $y(0)$ e $y'(0) = 1$.

104. Determine a solução de cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} y'' + 4y &= \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le t < 4 \\ 0 & \text{se} \quad t \ge 4 \end{cases} \\ y(0) &= 3 \\ y'(0) &= -2 \end{cases}$. (b) $\begin{cases} y'' + y &= \begin{cases} \sin t & \text{se} \quad 0 \le t < \pi \\ \cos t & \text{se} \quad t \ge \pi \end{cases} \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} y'' - 2y' + y &= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le t < 1 \\ t & \text{se} \quad 1 \le t < 2 \\ 0 & \text{se} \quad t \ge 2 \end{cases} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y'' + y &= \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 \le t < 3 \\ 3t - 7 & \text{se} \quad t \ge 3 \end{cases} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$.

(e) $\begin{cases} y'' + 2y' + y &= 2(t-3)u_3(t) \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$.

105. Determine a solução de cada um dos seguintes problemas:

(a) $\begin{cases} y'(t) + 2y(t) + \int_0^t y(u)\mathrm{du} = \sin t \\ y(0) = 1 \end{cases}$. (b) $\begin{cases} y'(t) = \sin t + \int_0^t y(t-u)\cos u\mathrm{du} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

106. Usando a Transformada de Laplace, calcule o valor do seguinte integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-3x} \cos(2x)\mathrm{dx}$.

107. Use a Transformada de Laplace para determinar as soluções dos seguintes sistemas de equações diferenciais que satisfazem às condições iniciais dadas:

(a) $\begin{cases} y_1' + y_2 &= 0 \\ y_2' + y_1 &= 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= 0 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} x''(t) - 6y'(t) - 7x &= 0 \\ y''(t) + x &= 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x(0) &= 0 &= x'(0) \\ y(0) &= 0 &= y'(0) \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} x' + 4x + 3y &= 0 \\ y' + 3x + 4y &= 2e^t \end{cases}$, $\begin{cases} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$.

(d) $\begin{cases} y' + 2y + z &= \sin x \\ z' - 4y - 2z &= \cos x \end{cases}$, $\begin{cases} y(0) &= 0 \\ z(0) &= 1 \end{cases}$.

(e) $\begin{cases} 5y' + z'' + 4z &= \sin t \\ y'' + 2z' + y &= 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y(0) &= 0 &= y'(0) \\ z(0) &= 0 &= z'(0) \end{cases}$.