Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

3/11/2004 Matemática III – Teste (Parte I) **1h15m**

Eng. Química e de Materiais

(5.0) **1.** Identifique e resolva as seguintes equações diferenciais de primeira ordem.

(a) $y' + 6xy + xy^2 = 0$ e $y(0) = 1$.

(b) $x^2\,\mathrm{d}y - (2xy + 3)\,\mathrm{d}x = 0$.

(c) $y = xy' + y' - (y')^2$.

(2.5) **2.** Considere a equação diferencial

$$(1 + y^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2(1 + y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

(a) Tomando $y = \tan z$ transforme a equação diferencial dada em

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} - 2\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0\,.$$

(b) Determine o integral geral da equação diferencial dada.

(2.5) **3.** Seja $\mathbf{S} = \{1, e^x, \cos x\}$.

(a) Calcule o wronskiano do sistema $\mathbf{S}$.

(b) Enuncie uma condição suficiente de independência linear de um sistema de três funções reais de variável real, diferenciáveis.

(c) Determine uma equação diferencial linear de ordem três que tem como soluções particulares as funções do sistema $\mathbf{S}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

15/12/2004 Matemática III – Teste (Parte II) **1h15m**

Eng. Química e de Materiais

(3.0) **4.** Considere a equação diferencial

$$x^2y'' + xy' - 4y = x^2 \ln x\,.$$

(a) Identifique-a.

(b) Efectuando a mudança de variável $x = e^t$ transforme a equação diferencial dada em

$$y'' - 4y = t\,e^{2t}\,.$$

(c) Determine a solução geral da equação dada usando o método da variação das constantes de Lagrange.

(3.0) **5.** Considere a equação diferencial

$$y''' - 5y'' + y' - 5y = f(x)\,.$$

(a) Sabendo que $x\,e^{5x}$ é solução da equação diferencial dada, determine a expressão analítica da função f.

(b) Determine o integral geral da equação diferencial dada.

(c) Indique uma equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes de ordem mínima, que admite as seguintes soluções particulares $\cos x\,,\ x\sin 2x\,,\ x^2\,.$

(4.0) **6.** Considere o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$x' = y + 5\,,\quad y' = -4x - 5y - 1$$

com condições inciais $x(0) = y(0) = 0\,.$

(a) Descrever o problema dado em termos de uma equação diferencial de segunda ordem.

(b) Diga o que entende por um sistema canónico de equações diferenciais de segunda ordem.

(c) Resolva o sistema linear dado aplicando transformadas de Laplace.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

6/01/2005 Matemática III – Exame (Parte I) **1h15m**

Eng. Química e de Materiais

(5.0) **1.** Identifique e resolva as seguintes equações diferenciais de primeira ordem.

(a) $(1+e^x)y\,y' = e^x$ e $y(0)=1$.

(b) $(x+y^2)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0$.

(c) $3xy\,\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = x^2+y^2$. Para a determinação do integral geral tome $y = zx$.

(2.5) **2.** Considere a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 4x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (4x^2-1)y = 0\,.$$

(a) Tomando $y = z\,e^{x^2}$ transforme a equação diferencial dada em

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} + z = 0\,.$$

(b) Sabendo que $z = \sin x$ é solução desta última equação diferencial, determine o integral geral da equação diferencial dada, usando o método do abaixamento de ordem.

(2.5) **3.** Considere uma equação diferencial de segunda ordem $y'' = f(x\,,\,y\,,\,y')$.

(a) Enuncie o teorema de existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy associado à equação diferencial dada.

(b) Verifique que $S = \{e^{x^2}\,,\,e^{-x^2}\}$ são linearmente independentes.

(c) Determine uma equação diferencial linear homogénea de ordem dois que tem como sistema fundamental de soluções as funções de S.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

6/01/2005 Matemática III – Exame (Parte II) **1h15m**

Eng. Química e de Materiais

(4.0) **4.** Considere a equação diferencial

$$y'' + 2y' - 3y = 1 + 10x\,.$$

(a) Determine a solução geral da equação $y'' + 2y' - 3y = 0\,.$

(b) Determine um integral particular da equação $y'' + 2y' - 3y = 5x\,.$

(c) Mostre que $y = -1/3$ é solução da equação diferencial $y'' + 2y' - 3y = 1\,.$

(d) Usando as alíneas anteriores, indique a solução geral da equação dada.

(2.5) **5.** Considere o problema de Cauchy

$$y'' + 2y' - 3y = 1\,, \text{ com } \; y(0) = 0 = y'(0)\,.$$

Determine o integral geral da equação diferencial aplicando transformadas de Laplace.

(3.5) **6.** Considere o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$y_1' = 2y_2\,, \quad y_2' = y_1 - y_2\,.$$

(a) Determine os valores e vectores próprios da matriz do sistema diferencial dado.

(b) Resolva o sistema pelo método de álgebra linear.

(c) Descrever o problema dado em termos de uma equação diferencial de segunda ordem.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

3/02/2005 Matemática III – Exame (Parte I) **1h15m**

Eng. Química e de Materiais

(5.0) **1.** Identifique e resolva as seguintes equações diferenciais de primeira ordem.

(a) $xy' = 2y + x^3 e^x \quad \text{e} \quad y(1) = 0\,.$

(b) $\cos y \,\mathrm{d}x + (1 + e^{-x}) \sin y \,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{e} \quad y(0) = \pi/4\,.$

(c) $y = xy' + (2y')^2\,.$

(2.5) **2.** Considere a equação diferencial

$$(1+y^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 2y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2(1+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(1+y^2)^2\,.$$

(a) Tomando $y = \tan z$ transforme a equação diferencial dada em

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} - 2\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3\,.$$

(b) Determine o integral geral da equação diferencial dada.

(2.5) **3.** Considere uma equação diferencial de segunda ordem $y'' = f(x\,,\, y\,,\, y')\,.$

(a) Enuncie o teorema de existência e unicidade de soluções para o problema de Cauchy associado à equação diferencial dada.

(b) Verifique que $S = \{e^{x^2}\,,\, \sin x\}$ são linearmente independentes.

(c) Determine uma equação diferencial linear homogénea de ordem dois que tem como sistema fundamental de soluções as funções de $S\,.$

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

3/02/2005 Matemática III – Exame (Parte II) **1h15m**

Eng. Química e de Materiais

(4.5) **4.** Considere a equação diferencial

$$y'' - 2y' + 10y = 0\,.$$

(a) Determine a solução geral da equação dada.

(b) Determine um integral particular da equação $y'' - 2y' + 10y = x$.

(c) Sabendo que $y = x + \sin(3x)$, é solução da equação

$$y'' - 2y' + 10y = f(x)\,,$$

indique a solução geral da equação $y'' - 2y' + 10y = x + 4f(x)$.

(2.0) **5.** Considere a equação diferencial

$$y'' - 2y' + 10y = e^x\,.$$

Determine o integral geral da equação diferencial aplicando o método da variação das constantes de Lagrange.

(3.5) **6.** Considere o seguinte problema de Cauchy

$$y_1' = -2y_1 - y_2 + e^t\,, \quad y_2' = -2y_1 - y_2 \quad \text{e} \quad y_1(0) = 0 = y_2(0)\,.$$

(a) Determine os valores e vectores próprios da matriz do sistema diferencial dado.

(b) Resolva o sistema usando transformadas de Laplace.

(c) Descrever o problema dado em termos de uma equação diferencial de segunda ordem.
