(3.0) **1. Enunciados e deduções**.

a) Enuncia o teorema de Taylor para uma função real de variável real, f.

b) Sabendo que se tem
$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,,\quad |x|<1\,,$$
determina o desenvolvimento em série de potências da função de representação analítica $\ln(1/(2-x))$.

c) Defina solução geral de uma equação diferencial, $y'=f(x,y)$, onde f é uma função real definida num domínio $D\subset\mathbb{R}^2$.

(3.5) **2. Séries de potências**.

a) Determina o raio de convergência e o domínio de continuidade da função, f, de representação analítica
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{2^{n+1}\,n^3}\,x^{2n}\,.$$

b) Aplicando a teoria das séries de potências, determina a solução do seguinte problema
$$y''+y=0\,,\quad y(0)=y'(0)=1\,.$$

(3.5) **3.** Identifica e resolve as seguintes **equações diferenciais de primeira ordem**:

a) $y'=(x+y)^2$, efectuando a mudança de variável $z=x+y$.

b) $e^{-y}\,\mathrm{d}x-(2y+xe^{-y})\,\mathrm{d}y=0$.

c) $y'=2-3y+y^2$.

(4.0) **4.**

a) Sabendo que $1/x$ é solução da equação diferencial linear

$$x^2\, y''' + 2x\, y'' - 2\, y' = 0\,,$$

determina a solução geral da equação $x^2\, y''' + 2x\, y'' - 2\, y' = e^x$.

b) Aplicando o método do polinómio anulador, resolve a equação diferencial de ordem três

$$y''' - 3\, y'' + 9\, y' + 13\, y = 2\, e^{-x}\,.$$

c) Determina a transformada de Laplace da função de expressão analítica

$$f(x) = x\, e^{3x}\, \cos(2x)\,.$$

(3.0) **5.** Considera a equação diferencial linear de segunda ordem

$$x\, y'' + 2\, y' + x\, y = 1\,,\ x > 0\,.$$

a) Verifica que $\{\sin x/x\,,\ \cos x/x\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogénea que lhe está associada.

b) Resolve a equação diferencial dada.

(3.0) **6.** Considera o seguinte problema de Cauchy

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Resolve o sistema usando transformadas de Laplace.

b) Indica a solução geral do sistema homogéneo associado.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra 04/01/06
Exame DURAÇÃO: 2H30M
Matemática III ENG. QUÍMICA E DE MATERIAIS

(3.0) **1. Enunciados e deduções**.

a) Sabendo que se tem
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,, \quad |x| < 1\,,$$
determina o desenvolvimento em série de potências da função de representação analítica $\arctan x$.

b) Define solução geral de uma equação diferencial, $y' = f(x,y)$, onde f é uma função real definida num domínio $D \subset \mathbb{R}^2$.

(3.5) **2. Séries de Potências**.

a) Determina o domínio de continuidade da função representada pela série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n!} x^n$.

b) Mostra que $(x^2+x-1)e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n!} x^n$.

c) Indica, justificando convenientemente, qual o valor de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{n!}$.

(3.5) **3.** Seja f uma função derivável em $[0,2]$ que verifica
$$2\int_0^x f(t)\,dt = x\,f(x) + x\,\cos(x)\,.$$

a) Classifica a equação diferencial satisfeita por f.

b) Justifica que pelo ponto $(\pi/2, 0)$ passa uma única solução da equação dada.

c) Determina a solução da equação diferencial que verifica $f(\pi/2) = 0$.

(3.0) **4. Enunciados e deduções**.

a) Mostra que o sistema de funções $\{e^x \cos(2x)\,,\, e^x \sin(2x)\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}$.

b) Determina a equação diferencial linear de ordem mínima que tem $\{x\,,\, e^x\}$ como soluções particulares da equação homogénea associada, e x^2 como solução particular.

(3.5) **5.** Considera a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 4x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (4x^2-1)y = 2\,e^{x^2}\cos x\,.$$

a) Tomando $y = z\,e^{x^2}$ transforma a equação diferencial dada em

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} + z = 2\cos x\,.$$

b) Resolve a equação dada.

c) Determina a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes de ordem mínima que tem $\cos x$, x^2 , $e^{2x}\sin x$, como soluções particulares.

(3.5) **6.** Considera o seguinte problema de Cauchy

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determina os valores próprios da matriz A.

b) Indica a solução geral do sistema homogéneo associado.

c) Resolve o sistema usando transformadas de Laplace.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra — 30/01/06

Exame de Recurso — Duração: 2h30m

Matemática III — Eng. Química e de Materiais

(5.0) **1.** Considera a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}\, x^{2n}$.

a) Determina o domínio de continuidade da função representada pela série de potências dada.

b) Mostra que $(1+2x^2)\, e^{x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}\, x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Mostra que $\{e^{x^2} , x^2\, e^{x^2}\}$ é um sistema de funções linearmente independente em $\mathbb{R}^+$.

d) Indica uma equação diferencial linear homogénea de ordem dois que a função de expressão analítica, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}\, x^{2n}$, verifica em $\mathbb{R}^+$.

(5.0) **2.** Identifica e resolve as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

a) $y = x\, y' - e^{y'}$.

b) $(2xy\, e^{x^2} + \ln y)\, \mathrm{d}x + (x/y + e^{x^2})\, \mathrm{d}y = 0$, $y(0) = 1$.

c) $y' = 2 - 3y + y^2$.

(4.0) **3.** Considera a equação diferencial $y''' - y' = 2\sin(x)\sin(2x)$.

a) Verifica se o conjunto de funções $\{1 , e^x , \cosh(x)\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogéna associada à equação dada.

b) Resolve a equação dada.

c) Determina a equação diferencial linear de coeficientes constantes de ordem mínima que tem $\sin x$, x , $e^{2x}\cos(3x)$, como soluções particulares da equação homogénea associada e $2e^{2x}$ como solução particular.

(6.0) **4.** Considera o seguinte problema de Cauchy

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 6 & -12 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 12 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determina o polinómio anulador, de grau mínimo, da matriz A.

b) Calcula a função $\exp(A\,t)$.

c) Resolve o sistema diferencial dado.

d) Tendo em atenção o teorema de Laplace determina uma função, f, tal que

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{5}{p(p^2 - 2p + 5)}.$$