Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra 18/10/06

Frequência I DURAÇÃO: 1h15m

Matemática III ENG. QUÍMICA E DE MATERIAIS

(4.0) **1.** Sabendo que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,, \quad |x| < 1:$

a) Determina o desenvolvimento em série de potências da função de representação analítica
$$\frac{3}{x^2+x-2}\,,$$
indicando o seu intervalo de convergência.

b) Justifica que
$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\,, \quad |x| < 1\,,$$
e determina a partir daí o desenvolvimento em série de potências da função de expressão analítica $f(x) = \log(a+x)\,,\ a \in \mathbb{R}^+$.

(4.0) **2.** Considera a equação diferencial $y' - 2x\,y = e^{x^2}$.

a) Determina o raio de convergência e o domínio de continuidade da função, f, de representação analítica
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}\, x^n\,.$$

b) Aplicando a teoria das séries de potências, determina a solução do seguinte problema
$$y' - 2x\,y = 0\,, \quad y(0) = 1\,.$$

c) Determina a solução geral da equação diferencial dada.

(2.0) **3.** Identifica e resolve as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

a) $(x^2+1)\,y' + y^2 + 1 = 0\,.$

b) $8x\,y\,y' + x + 4y^2 = 0\,.$

(3.0) **4.** Considera a equação diferencial linear de coeficientes contantes

$$y''' + a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,,\ \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

a) Sabendo que -2 e i são raízes do polinómio característico e que e^{3x} é uma solução da equação diferencial dada, determina a, b, c e f.

b) Indica a solução geral da equação dada.

(3.0) **5.**

a) Mostra que o conjunto $\{x^3, x^4\}$ é, no intervalo $]0, +\infty[$, um sistema fundamental de soluções para uma equação diferencial linear de segunda ordem.

b) Determina uma *equação diferencial linear não homogénea* cuja solução geral é $y(x) = c_1\,x^3 + c_2\,x^4 + \ln\,x, \quad x > 0$.

(4.0) **6.** Considera o seguinte problema de Cauchy

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + B \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

onde $A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Determina os valores próprios da matriz A.

b) Determina os vectores próprios da matriz A.

c) Calcula $\exp(A\,t)$.

d) Resolve o problema de Cauchy dado.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra	04/01/07
Exame	Duração: 2h30m
Matemática III	Eng. Química e de Materiais

(7.0) **1.** Considera o desenvolvimento em série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\,3\,5\cdots(2n-1)}{2\,4\,6\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

a) Determina o domínio de continuidade da função representada pela série de potências dada.

b) Mostra que $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\,3\,5\cdots(2n-1)}{2\,4\,6\cdots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, no domínio calculado na alínea a).

c) Mostra que $\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}\,.$

d) Define solução geral de uma equação diferencial de primeira ordem

$$y' = f(x,y)\,.$$

e) Aplicando a teoria das séries de potências, determina a solução do seguinte problema

$$y'' + xy = 0\,, \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1\,.$$

(3.0) **2.** Identifica e resolve as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

a) $2xy \ln y \,\mathrm{d}x + (y^2\sqrt{1+y^2} + x^2)\,\mathrm{d}y = 0\,.$

b) $\mathrm{d}x - (x\cos y + \sin(2y))\,\mathrm{d}y = 0\,.$

c) $xy' + y = y^2 \,\ln x\,.$

(6.0) **3.** Considera a equação diferencial

$$y'' + 4\,y = 0\,.$$

a) Determina um sistema fundamental de soluções para a equção dada.

b) Resolve a equação

$$y'' + 4\,y = \sec(2x)\,.$$

c) Sabendo que $y(x) = -x\cos(2x)/4$ é solução da equação $y'' + 4\,y = \sin(2x)$ indica, justificando convenientemente, a solução geral da equação

$$y'' + 4\,y = 5\sec(2x) + 3\sin(2x)\,.$$

d) Determina a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes de ordem mínima que tem $y(x) = x + 2x^2\,e^{3x} + 50\,e^{-x}\cos x$ como solução particular.

e) Verifica se as funções e^{-x^2}, e^{x^2} são linearmente independentes. Justifique convenientemente.

(4.0) **4.** Considera o seguinte problema de Cauchy

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determina os valores próprios da matriz A e os respectivos espaços próprios.

b) Indica a solução geral do sistema homogéneo associado.

c) Resolve o problema de Cauchy usando transformadas de Laplace.

(4.0) **1.** Sabendo que $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \,, \qquad |x| < 1:$

a) Determina o desenvolvimento em série de potências da função de representação analítica

$$f(x) = 2\,\log(1+2x)\,.$$

b) Determina o domínio de continuidade da função $y = f(x)$.

c) Indica, sem calcular, $f^{(29)}(0)$.

(5.0) **2.** Identifica e resolve as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

a) $\operatorname{cosec}(x)\, y' - y = 1 \,,\ y(\pi/2) = 17\,.$

b) $(x\cos y - y\sin y)\,\mathrm{d}y + (x\sin y + y\cos y)\,\mathrm{d}x = 0\,.$

c) $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$, sabendo que $y = 1/x$ é solução particular.

(7.0) **3.** Considera a equação diferencial

$$(x-1)\,y'' - x\,y' + y = 0\,.$$

a) Determina $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que a função de expressão analítica $y = e^{\alpha x}$ é solução da equação dada.

b) Determina um sistema fundamental de soluções para a equação dada.

c) Sabendo que $y = e^{-x}$ é solução da equação diferencial

$$(x-1)\,y'' - x\,y' + y = f(x)$$

determina a solução geral da equação $(x-1)\,y'' - x\,y' + y = 3\,f(x)$.

d) Determina a equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes de ordem mínima que tem $y(x) = 2x\,e^{5x} + 50\,e^{-x}\cos(3x) + \cosh x$ como solução particular.

e) Resolve o problema de Cauchy

$$y'' - y' - 2\,y = \sinh(x)\,,\ y(0) = y'(0) = 0\,.$$

(4.0) **4.** Considera o seguinte problema de Cauchy

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

a) Determina o polinómio anulador, de grau mínimo, da matriz A.

b) Calcula a função $\exp(A\,t)$.

c) Resolve o problema de Cauchy usando transformadas de Laplace.