Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra — 2005-06
Caderno de Exercícios — Cálculo (Vectorial) Diferencial e Integral
Matemática IV — Eng. Química e de Materiais

1. Cálculo Diferencial

Limite, continuidade e diferenciabilidade de funções vectoriais de várias variáveis.

1. Considere o campo de vectores F definido por $F(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

   (a) Identifique as funções coordenadas.

   (b) Determine o domínio de definição de F.

   (c) Determine o domínio de continuidade de F.

   (d) Construa a matriz jacobiana de F e indique o seu domínio de definição.

2. Calcule as matrizes jacobianas das seguintes funções:

   (a) $f(x,y)=(x\ \sin\ y,\ y^2\,e^x)\,,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2;$

   (b) $g(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2,\ \sin(x\,z))\,,\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3;$

   (c) $h(t)=\cos t\ \hat{\imath}+\sin t\ \hat{\jmath}\,,\quad t\in[0,2\pi];$

   (d) $\varphi(u,v,w)=e^u(\cos v\sin w\hat{\imath}+\sin v\sin w\hat{\jmath}+\cos w\hat{\kappa})\,,\quad (u,v,w)\in\mathbb{R}^3.$

3. Construa as matrizes jacobianas das seguintes funções, e calcule o seu determinante:

   (a) $F(r,\theta)=(r\ \cos\ \theta, r\ \sin\ \theta)\ ,\quad r\geq 0\,,\quad \theta\in]-\pi,\pi\,];$

   (b) $G(\rho,\theta,\phi)=(\rho\ \cos\ \theta\ \sin\ \phi,\rho\ \sin\ \theta\ \sin\ \phi,\rho\ \cos\ \phi)\ ,\quad \rho\geq 0\,,\quad \phi\in[\,0,\pi\,]\,,\quad \theta\in]-\pi,\pi\,].$

4. Seja $\vec{u}=3\hat{\imath}-5\hat{\jmath}$. Determine $D_{\vec{u}}g(\pi,-2,1)$ e $D_{\vec{u}}\varphi(0,\pi/4,\pi/4)$, com g,φ funções do exercício 2.

5. Considere a função vectorial $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ com $f(x,y)=(x+y^2,xy,e^y)$. Para $P_0=(1,0)$ e $\vec{u}=\hat{\imath}-\hat{\jmath}$ calcule $J_f(P_0)$ e $D_{\hat{u}}f(P_0)$.

Derivada de funções compostas.

6. Sendo $u(x,y,z)=x^3\,F(y/x,z/x)$, prove que $x\,u_x+y\,u_y+z\,u_z=3u$.

7. Sendo $z=y^2/2+\phi(1/x+\ln\ y)$, prove que $y\,z_y+x^2z_x=y^2$.

8. Considere a função h definida por $h(x,y)=f(1/(x^2+y^2))$, onde f é uma função real de variável real diferenciável. Seja $g(u,v)=h(x(u,v),y(u,v))$ com $x(u,v)=u\cos v$, $y(u,v)=u\sin v$.

   (a) Verifique que $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=0$; (b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}(1,0)$, sabendo que $f'(1)=2$.

9. Sejam f e g funções de uma variável de classe C^2. Sendo $c \in \mathbb{Z}^+$, prove que a função $u(x,t) = f(x+c\,t)+g(x-c\,t)$ verifica a seguinte equação (dita *equação de propagação*) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

10. Seja $w(x,y,z) = f(y-z, z-x, x-y)$ com f função real admitindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens.

    (a) Mostre que $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$;

    (b) Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$.

11. Seja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ uma função de classe C^3. Sendo $F(x,y) = \ln(g(2x, y^2))$,

    (a) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de F em função das derivadas parciais de g;

    (b) Sabendo que g e as suas derivadas satisfazem as seguintes relações: $g(0,\beta) = 2\beta$ e $g_{uv}(0,\beta) = g_u(0,\beta) g_v(0,\beta) = \beta$. Mostre que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(0,1) = 1$.

12. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções reais definidas por:

    (a) $f(x,y) = \displaystyle\int_a^{x+y} g(t)\,dt + \int_a^{xy} g(t)\,dt$;

    (b) $f(x,y,z) = \displaystyle\int_{x^4}^{\sin(x\sin(y\sin z))} g(t)\,dt$;

    onde g é uma função real de variável real, contínua em $\mathbb{R}$.

13. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. O *laplaciano* de f é dado por
$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Exprima o laplaciano de f em coordenadas polares, isto é, sendo
$$x = r\cos\theta \text{ e } y = r\sin\theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in]-\pi, \pi], \quad \text{e} \quad g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta),$$
exprima $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ em função das derivadas parciais de g.

14. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. O *laplaciano* de f é dado por
$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Exprima o laplaciano de f em coordenadas esféricas, isto é, sendo
$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \ y = \rho\sin\phi\sin\theta \text{ e } z = \rho\cos\phi, \quad \rho \geq 0, \quad \phi \in [0,\pi], \theta \in]-\pi,\pi],$$
e $g(\rho,\theta,\phi) = f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$, descreva, em função das derivadas parciais de g, $\Delta f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)$.

15. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável e $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = f(\sin x, \cos y)$. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1$, calcule $J_F(0,0)$.

16. Seja $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(0,e,0)$, e $[e \ -1 \ e]$ a matriz jacobiana de h em $(0,e,0)$. Mostre que a aplicação g definida, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por $g(x,y) = h\left(\sin\left(x\,y^2\right), e^y, \ln\left(1+x^2\right)\right)$, é diferenciável em $(0,1)$ e que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 0$.

17. Sejam $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = \left(e^{xy}, x^2\,y\right)$ e $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(r,s,t,u) = \left(r^2+t^2, 2\,s\,u\right)$. Utilize o teorema da derivada da função composta para concluir que $g\circ f$ é diferenciável em $\mathbb{R}^4$ e calcular $J_{g\circ f}\,(1,1,1,1)$.

18. Considere as funções $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por $f(x,y) = \sin(x^2-y^2)$ e $g(x,y) = (x+y, x-y)$. Calcule as matrizes Jacobianas de f, g e $f\circ g$ no ponto (x,y).

19. Calcule a matriz Jacobiana de $g\circ f$ no ponto (x,y,z), sendo:

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+y^2, xy^2z) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (s,t) & \mapsto & (s^2+t, st, e^t)\,. \end{array}$$

20. Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$. Considere as funções $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$h(x,y) = e^{8-x^2+y^3}\,, \quad g(x,y,z) = \begin{bmatrix} f\,(x^2) + f\,(x^2+y^2) \\ f^2\,(yz) \end{bmatrix}.$$

Prove que $h\circ g$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e determine a matriz jacobiana de $h\circ g$ em $(1,1,2)$.

21. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que $J_f\,(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e seja F definida por $F(r,\theta,\phi) = f(r\,\cos\theta\,\sin\phi, r\,\sin\theta\,\sin\phi, r\,\cos\phi)$. Calcule $J_F(1,\pi/4,\pi/2)$.

22. Considere a função real f definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = \dfrac{x\,y^2}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$.

    (a) Prove que f é contínua em $(0,0)$.

    (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, para qualquer vector não nulo v de $\mathbb{R}^2$ e indique o valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

    (c) f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique convenientemente a sua resposta.

    (d) Considere a função $g(t) = (3\,t, 2\,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

        i. Prove que $f\circ g$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que $(f\circ g)'\,(0) = 12/13$.

        ii. Mostre que $\nabla\,f(0,0)\cdot g'(0) = 0$. Explique porque é que este resultado não contraria o teorema da derivada da função composta.

Teorema da função implícita. Teorema da função inversa. Dependência funcional.

23. Para que pontos (x_0,y_0) (e nas respectivas vizinhanças), define a equação $y^2-2xy=1$, nas condições do teorema da função implícita,

    (a) y como função implícita de x; (b) x como função implícita de y.

24. Considere a função F definida em $\mathbb{R}^3$ por $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-x\,y$.

(a) Mostre que a equação $F(x,y,z)=0$ define z como função implícita de x e y numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$ e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(1,1)$.

(b) Determine, indicando o domínio de definição e a expressão analítica, três funções, $z=f(x,y)$, $y=g(x,z)$ e $x=h(y,z)$, definidas implicitamente pela equação $F(x,y,z)=0$.

(c) Analise as condições do teorema da função implícita em $(0,0,0)$ e diga se é possível explicitar alguma das variáveis em função das restantes, numa vizinhança deste ponto.

25. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Suponha que a equação $f(y/x, z/x)=0$ define, nas condições do teorema da função implícita, z como função implícita de x e y. Mostre que
$$x\,\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + y\,\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = z(x,y)\,.$$

26. Considere a equação $x - z + (y+z)^2 - 6 = 0$.

(a) Mostre que a equação dada define z como função implícita de x e y numa vizinhança do ponto $(3,-3,1)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(3,-3)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(3,-3)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(3,-3)$.

27. Considere a equação $\log(xyz) + e^{x+2y-ez} = 0$.

(a) Prove que numa vizinhança de $(1,1/2,2/e)$ esta equação define x como função implícita de y,z.

(b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial y}(1/2,2/e)$ e $\dfrac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}(1/2,2/e)$.

28. Seja $\Phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\Phi'(1)\neq 0$.

(a) Mostre que a equação $\Phi\left(x^2+y^2\right) - \Phi(2x+z) = 0$ define implicitamente z em função de x e y numa vizinhança do ponto $(1,0,-1)$.

(b) Averigúe se $(1,0)$ é ponto crítico da função $z=z(x,y)$ definida na alínea anterior.

29. Considere a função F definida em $\mathbb{R}^3$ por $F(x,y,z) = 2\,x^2 + 2\,y^2 + z^2 - 8\,x\,y - 2\,z$.

(a) Mostre que a equação $F(x,y,z) = -7$ define, nas condições do Teorema da função implícita, uma função $y=h(x,z)$, numa vizinhança do ponto $(2,1,1)$.

(b) Mostre que $(2,1)$ é um ponto crítico de h e classifique-o.

30. Seja $F(x,y,z) = x^2 - 3\,y\,z^2 + x\,y\,z - 1$.

(a) Mostre que a equação $F(x,y,z)=0$ define, nas condições do Teorema da função implícita, z como função g de x e y numa vizinhança de $(1,1,0)$.

(b) Seja $h(u,v) = g(v^2-u, 1-u\,v)$ onde g é a função considerada na alínea anterior. Calcule $h_{uv}(0,1)$.

31. Considere o sistema $x^3 + 2\,y = 2\,t^3$, $\quad x - y^2 = t^2 + 3\,t$.

(a) Mostre que o sistema dado define, nas condições do teorema da função implícita, x e y como funções de t numa vizinhança de $(x, y, t) = (0, 0, 0)$.

(b) Sendo $H(x, y) = \sin(3x - y)$ e $g(t) = H(x(t), y(t))$, calcule $g'(0)$.

32. Considere a função F definida em $\mathbb{R}^4$ por $F(x, y, u, v) = \left(x^2 + y^2 + xv, uv + xy\right)$.

(a) Mostre que a equação $F(x, y, u, v) = (3, 1)$ define, nas condições do Teorema da função implícita, uma função $(x, y) = h(u, v)$, numa vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (1, 1, 0, 1)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}(0, 1)$, $\dfrac{\partial x}{\partial v}(0, 1)$ e $\dfrac{\partial^2 x}{\partial v \, \partial u}(0, 1)$.

33. (a) Mostre que o sistema $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$, $2x^2 + y - z = 0$ define, nas condições do teorema da função implícita, $y = f(x)$ e $z = g(x)$, numa vizinhança de$(x, y, z) = (0, 1, 1)$.

(b) Calcule $f'(0)$.

(c) Seja h a função real definida por $h(s, t) = e^{s-t} f(s - g(\ln t))$, onde f e g são as funções referidas na alínea anterior. Calcule $\dfrac{\partial h}{\partial t}(1, 1)$.

34. (a) Prove que o sistema de equações $x^3 + e^x - t^2 - t = 1$, $y t^3 + y^2 t + y - t = 0$, define implicitamente, nas condições do teorema da função implícita, x e y como funções de t, numa vizinhança de $(x, y, t) = (0, 0, 0)$.

(b) Sejam $h, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciáveis com $J_h(0, 1) = [0\ 0]$ e x e y as funções de t consideradas na alínea anterior. Se $f(t) = g(x(t)\, y(t), h(x(t), 1))$, calcule $f'(0)$.

35. Mostre que a função vectorial definida por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, e^z)$ é invertível numa vizinhança de qualquer ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ e determine a matriz Jacobiana, no ponto $(1, 0, 1)$, da função g que é a inversa de f numa vizinhança de $(1, 0, 0)$.

36. Determine os pontos P_0 para os quais o teorema da função inversa garante, numa vizinhança de P_0, a existência de uma inversa local para as seguintes funções:

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2, \sin x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(b) $\varphi(u, v, w) = e^u(\cos v \sin w \hat{\imath} + \sin v \sin w \hat{\jmath} + \cos w \hat{k})$, $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

37. Seja, h, a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $h(x, y) = \left(x^2 + 2xy, 2x + 2y\right)$.

(a) Determine para que pontos P_0 a função h é, pelo teorema da função inversa, localmente invertível numa vizinhança de P_0.

(b) Inverta localmente a restrição da função h a $B = B((2, 1), r)$.

38. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = \left(x^3, y\right)$. Mostre que:

(a) f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e que $\det J_f(0, 0) = 0$. (b) f é bijectiva e defina f^{-1}.

39. Considere a função $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Mostre que F é localmente invertível numa vizinhança de (a,b), para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, mas não admite inversa (global) em $\mathbb{R}^2$.

40. Considere a função vectorial $f = (f_1, f_2)$ definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por $f_1(x,y) = 2x/(x^2+y^2)$ e $f_2(x,y) = -2y/(x^2+y^2)$.

    (a) Mostre que f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e que $\det J_f\,(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

    (b) Averigúe se f admite inversa e, em caso afirmativo, determine-a.

41. Seja $(u,v) = f(x,y)$ com $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (e^{x\,y}, x+y)$.

    (a) Mostre que f é localmente invertível numa vizinhança de $(1,2)$.

    (b) Calcule $\det J_{f^{-1}}\,(f(1,2))$.

42. Considere o sistema $x + y^2 - u^3 + v = 0\,, \quad x^2 - y + u - v^2 = 0\,.$

    (a) Mostre que o sistema define, nas condições de Teorema da função implícita, (u,v) como função φ de (x,y), numa vizinhança de $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (0,0,0,0)$.

    (b) Calcule a matriz Jacobiana da função φ, definida na alínea anterior, no ponto $(0,0)$.

    (c) Sendo $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por, $g(u,v) = (v \cos u, u \sin v)$, calcule $J_{g\circ\varphi}\,(0,0)$.

    (d) Justifique que φ é localmente invertível numa vizinhança de $(0,0)$ e calcule $\det J_{\varphi^{-1}}\,(0,0)$.

43. Considere o sistema de equações $e^{x-u} + y\,v + 3 = 0\,, \quad e^{y+v} - x\,u = 0\,.$

    (a) Mostre que o sistema define, nas condições de Teorema da função implícita, (u,v) como função g de (x,y), numa vizinhança de $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (1,2,1,-2)$.

    (b) Calcule a matriz Jacobiana da função g, definida na alínea anterior, no ponto $(1,2)$.

    (c) Justifique que g é localmente invertível numa vizinhança de $(1,2)$ e calcule $\det J_{g^{-1}}\,(1,-2)$.

44. Seja $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $F(x,y) = (y + e^{xy},\, x - e^{xy})$.

    (a) Mostre que F é localmente invertível numa vizinhança de $(0,0)$ e calcule $J_{F^{-1}}\,(1,-1)$.

    (b) Seja G a função definida por $G(u,v) = (u + \ln|\,v\,|, v + \ln|\,u\,|)$.

        i. Determine o domínio de G.

        ii. Calcule $J_{G\circ F}\,(0,0)$ e $J_{F^{-1}\circ G}\,(1,-1)$.

45. Sejam f uma função real continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$ verificando $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = f$, e ϕ uma função vectorial de $\mathbb{R}^2$ definida em $\mathbb{R}^2$ por $\phi(\theta,\rho) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Mostre que:

    (a) A função $F = f\circ\phi$ verifica a equação $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = F$.

    (b) $F(\theta,\rho) = g(\rho)\exp\theta$, para uma qualquer função, g, real de variável real continuamente diferenciável.

(c) A função inversa de ϕ, ϕ^{-1}, está definida por $\phi^{-1}(x,y) = (\arctan(y/x), \sqrt{x^2+y^2})$.

(d) Conclua que $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})\exp(\arctan(y/x))$.

46. Mostre que as funções $f_1(x,y) = e^{2x-y}$, $f_2(x,y) = e^{2y-4x}$ são funcionalmente dependentes em $\mathbb{R}^2$. Sendo $f = (f_1, f_2)$, determine $f(\mathbb{R}^2)$.

47. Verifique que são funcionalmente dependentes em $\mathbb{R}^2$, as funções
$$f(x,y) = 2xy + 2x + 1, \quad g(x,y) = x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 1,$$
e que estão ligadas pela relação $f^2 - 2f - \lambda g + \nu = 0$, com λ e ν constantes a determinar.

48. Determinar a constante $\lambda \in \mathbb{R}$ que torna funcionamente dependentes as funções
$$f_1(x,y,z) = x + y - z, \quad f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad f_3(x,y,z) = x^3 + y^3 - z^3 + \lambda xyz.$$

49. Verifique se as funções $f_1(x,y) = x/y$, $f_2(x,y) = (x-y)/(x+y)$, são funcionalmente dependentes. Determine o domínio A de definição de $f = (f_1, f_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e identifique $f(A)$.

Algumas noções geométricas do cálculo diferencial: curvas e superfícies.

50. Faça um esboço da curva definida por:

(a) $\vec{r}(t) = 4t\hat{\imath} + 2\cos t\hat{\jmath} + 3\sin t\hat{k}$, $t \in [0, \pi]$; (c) $\vec{r}(t) = (3\exp(-2t) - 1, \exp(-t))$, $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\vec{r}(t) = 4t\hat{\imath} + 2\cos t\hat{\jmath} + 3\sin t\hat{k}$, $t \in [0, 2\pi]$; (d) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}\sin t\hat{\imath} + \sqrt{2}\sin t\hat{\jmath} + 2\cos t\hat{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

51. Determine equações cartesianas de cada uma das curvas consideradas no exercício anterior.

52. Determine uma parametrização da curva C definida por:

(a) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } y = x\}$; (b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } z = 1\}$;

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1 \text{ e } y = 2x\}$.

53. Determine uma equação da recta tangente à curva C no ponto P_0 indicado:

(a) $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$, $P_0 = (-1, 0, \pi)$;

(b) $x = t^2$, $y = 2$, $z = -t^3$, $t \in [0, 2]$, $P_0 = (1, 2, -1)$.

54. Considere as curvas Γ_1 e Γ_2 definidas por:
$$\Gamma_1 : \vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + \sin t\hat{k}, \quad \Gamma_2 : x^3 + 2xy - 3y^2 = 0, \quad y > 0.$$
Determine as equações da recta tangente e do plano/recta normal às curvas Γ_1 e Γ_2 nos pontos $t = \pi/4$ e $(1,1)$, respectivamente.

55. Determine as equações da recta tangente e do plano normal à curva $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$, $x^2 + 2y^2 = z$, no ponto $P_0 = (-2, 1, 6)$.

56. Identifique e escreva uma equação cartesiana da superfície de equação vectorial:

(a) $\vec{r}(u,v) = (1+2u)\,\hat{\imath} + (-u+3v)\,\hat{\jmath} + (2+4u+5v)\,\hat{\kappa}$; (c) $\vec{r}(u,v) = u\,\hat{\imath} + u\cos v\,\hat{\jmath} + u\sin v\,\hat{\kappa}$;

(b) $\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\hat{\imath} + u\sin v\,\hat{\jmath} + u^2\,\hat{\kappa}$; (d) $\vec{r}(u,v) = u\,\hat{\imath} + \cos v\,\hat{\jmath} + \sin v\,\hat{\kappa}$.

57. Determine uma representação paramétrica para o plano que passa pelo ponto $(1,2,-3)$ e contém os vectores $\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{\kappa}$ e $\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{\kappa}$.

58. Determine uma representação paramétrica para a porção de superfície de equação $-x^2-y^2+z^2=1$, com $(x,y)\in[-1,1]\times[-3,3]$.

59. Considere a superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v)=(v\cos u, v\sin u\,,\, 1/(v^2))\,,\ \ 0\le u<2\pi,\ \ v>0\,.$

   (a) Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície no ponto $P_0=(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,1)$;

   (b) Represente geometricamente a superfície dada.

60. Considere a superfície S parametrizada por $S:\ \vec{r}(u,v)=(u,v,u^2+v^2)\,,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2\,.$

   (a) Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície S no ponto $P_0=(1,1,2)$;

   (b) Represente geometricamente a superfície dada.

61. Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície S definida por
$$S:\ \vec{r}(u,v)=(u-v,u^2+v^2,uv)\,,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2\,,$$
no ponto P_0 tal que $\overrightarrow{OP_0}=\vec{r}(1,1)$.

62. Determine uma equação do plano tangente às seguintes superfícies nos pontos indicados:

   (a) $z=x^2+y^2$ no ponto $P_0=(1,-2,5)$;

   (b) $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=3$ no ponto $P_0=(0,1,-1)$;

   (c) $x^2+y^2+z^2=2rz$ no ponto $P_0=(r\cos\theta,r\sin\theta,r)$ com $r>0$;

   (d) $x^2+y^2=25$ no ponto $P_0=(3,4,2)$.

63. Mostre que as superfícies de equação $x^2/16+y^2/9=z^2$ e $x^2+y^2+(z-10)^2=90$, são tangentes nos pontos $(0,3,1)$ e $(0,-3,1)$.

64. Prove que toda a recta normal a uma esfera passa pelo seu centro.

65. Considere a superfície S definida por $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2-2x=0\}$. Determine os pontos de S nos quais o plano tangente é paralelo a um dos planos coordenados.

66. Determine os planos tangentes à superfície de equação $x^2+2y^2+3z^2=11$ paralelos ao plano de equação $x+y+z=1$.

67. Em que ponto do eplipsoide $x^2/4+y^2/4+z^2=1$ a normal forma ângulos iguais com os eixos coordenados.

68. Seja f uma função diferenciável e S a superfície de equação $z=y\,f(x/y)$.

(a) Mostre que S admite plano tangente em cada um dos seus pontos.

(b) Mostre que todos os planos tangentes a S passam em $(0,0,0)$.

69. Seja $G(u,v,w)$ uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ tal que
$$G(0,1,1)=0\,,\quad \frac{\partial G}{\partial u}(0,1,1)=-2\,,\quad \frac{\partial G}{\partial v}(0,1,1)=2 \ \text{ e } \ \frac{\partial G}{\partial w}(0,1,1)=-1\,.$$
Considere a função definida por $F(x,y,z)=G(xy,x+y,z^2)$.

(a) Determine $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ em função das derivadas parciais de G.

(b) Seja S a superfície de equação $F(x,y,z)=0$. Determine uma equação do plano tangente a S no ponto $(1,0,-1)$.

70. Seja $\phi(u,v,w)$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e tal que
$$\phi_w(u,v,w)=2\phi_v(u,v,w)\neq 0\,,\quad \phi(1,1,0)=0\,,\quad \phi_v(1,1,0)=-1\,,\quad \text{e} \quad \phi_u(1,1,0)=-2\,.$$
Considere a superfície S de equação $\phi(x+2y,2z^2,2xy)=0$.

(a) Mostre que, numa vizinhança de $(1,0,1/\sqrt{2})$, S é o gráfico de uma função diferenciável $z=f(x,y)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

(c) Determine uma equação do plano tangente a S no ponto $(1,0,1/\sqrt{2})$.

71. Seja $fv\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 verificando $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3f(x,y)$, e considere a função $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $F(u,v)=f\left((u+v)^2,(u-v)^2\right)$.

(a) Mostre que $u\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v)+v\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v)=6F(u,v)\,,\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

(b) Suponha que $F(1,1)=0$. Mostre que a superfície de $\mathbb{R}^3$ de equação $w=F(u,v)$ admite plano tangente no ponto $(u_0,v_0,w_0)=(1,1,0)$ e que este passa na origem.

2. Cálculo Integral

Superfícies Quádricas.

72. (a) Descreva e represente o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido pela equação $z=y^2$.

(b) Descreva e represente o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $z=y^2$.

73. Considere as superfícies de equação $x^2+2\,y^2+z^2=1\,,\quad y^2=x^2+z^2\,.$

(a) Determine o traço em planos de equação $x=k$, $y=k$ e $z=k$.

(b) Identifique e faça uma representação gráfica das superfícies.

74. Identifique e esboce as superfícies quádricas definidas pelas seguintes equações:

(a) $x^2 + z^2 = 9$;

(b) $x^2 - y^2 + z^2 = 4$;

(c) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$;

(d) $4z^2 - x^2 - y^2 = 1$;

(e) $(z-4)^2 = x^2 + y^2$;

(f) $x^2 + 4z^2 - y = 0$;

(g) $x^2 + y^2 + z^2 = -2z$;

(h) $y = z^2 - x^2$;

(i) $x^2 + y^2 = 4 - z$;

(j) $z = 2 + y^2$.

75. Considere as superfícies S_1 e S_2 definidas por
$$S_1:\ x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1\,; \quad S_2:\ 2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0\,.$$

(a) Identifique cada uma das superfícies e represente-as graficamente.

(b) Mostre que a curva definida pela intersecção de S_1 e S_2 é uma curva plana.

76. Considere as superfícies S_1 e S_2 definidas por $S_1:\ z = x^2 + y^2\,;\quad S_2:\ z = 1 - y^2\,.$

(a) Identifique e esboce cada uma das superfícies.

(b) Determine a curva $\mathcal{C}$ de intersecção de S_1 e S_2 e indique a projecção de $\mathcal{C}$ em cada um dos planos coordenados.

77. Represente geometricamente o sólido S definido pelas condições:

(a) $x^2 + y^2 \le z \le 2 - x^2 - y^2$;

(b) $x^2 + y^2 \le 4$ e $x^2 + y^2 \ge (z-6)^2$;

(c) $x^2 + y^2 \le 1$ e $0 \le z \le x + y$;

(d) $0 \le z \le 2$ e $x^2 + y^2 - z^2 \le 1$;

(e) $0 \le z \le 2 + y^2$ e $|\,x\,| \le 2 \ \wedge\ |\,y\,| \le 1$.

78. Faça o esboço gráfico dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

(a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, \ \text{ e } 6x + 3y + 2z \le 12\}$;

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2 + y^2 = 6y \ \text{ e } \ x^2 + y^2 + z^2 \le 36\}$;

(c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ 4 + z \ge x^2 + y^2 \ \text{ e } \ 2 - z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Integral Duplo. Definição e propriedades.

79. Calcule cada um dos seguintes integrais duplos depois de os identificar como volume de um sólido:

(a) $\displaystyle\iint_R 3\,dA,\quad R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ -2 \le x \le 2, 1 \le y \le 6\big\}$;

(b) $\displaystyle\iint_R 5 - x\,dA,\quad R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ 0 \le x \le 5, 0 \le y \le 3\big\}$;

(c) $\displaystyle\iint_R 4 - 2y\,dA,\quad R = [\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$;

(d) $\displaystyle\iint_R \sqrt{4-y^2}\,dA, \quad R=[\,0,4\,]\times[\,0,2\,].$

80. Se $R=[\,0,1\,]\times[\,0,1\,]$, mostre que $\displaystyle 0\leq\iint_R \sin(x+y)\,dA\leq 1\,.$

81. Sejam D,R e B as regiões planas definidas por $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 1\}$; $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 1, x\geq 0\}$; $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 1, y\leq 0\}$.
Sem calcular o valor do integral diga se é positivo, negativo ou nulo o valor do integral:

(a) $\displaystyle\iint_D dA$;

(b) $\displaystyle\iint_B dA$;

(c) $\displaystyle\iint_R 5\,x\,dA$;

(d) $\displaystyle\iint_B 5\,x\,dA$;

(e) $\displaystyle\iint_D 5\,x\,dA$;

(f) $\displaystyle\iint_D y^3+y^5\,dA$;

(g) $\displaystyle\iint_B y^3+y^5\,dA$;

(h) $\displaystyle\iint_R y^3+y^5\,dA$;

(i) $\displaystyle\iint_B y-y^3\,dA$;

(j) $\displaystyle\iint_D y-y^3\,dA$;

(k) $\displaystyle\iint_D \sin\,y\,dA$;

(l) $\displaystyle\iint_D \cos\,y\,dA$;

(m) $\displaystyle\iint_D e^x\,dA$;

(n) $\displaystyle\iint_D x\,e^x\,dA$;

(o) $\displaystyle\iint_D x\,y^2\,dA$;

(p) $\displaystyle\iint_B x\,\cos\,y\,dA$;

Cálculo do integral duplo em coordenadas cartesianas.

82. Calcule os seguinte integrais iterados

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2}(x+2\,y)\,dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_1^2\int_y^2 x\,y\,dx\,dy$; (c) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{2-x}(x^2-y)\,dy\,dx$.

83. Esboce o domínio de integração e inverta a ordem de integração

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\,x} f(x,y)\,dy\,dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^4\int_{y/2}^2 f(x,y)\,dx\,dy$;

(c) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{\ln\,x} f(x,y)\,dy\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$;

(e) $\displaystyle\int_0^1\int_{\arctan\,x}^{\pi/4} f(x,y)\,dy\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}/\sqrt{2}}^{\sqrt{4-x^2}/\sqrt{2}} f(x,y)\,dy\,dx$;

(g) $\displaystyle\int_0^2\int_x^{\sqrt{4\,x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$;

(h) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^3\int_0^{3-x/2} f(x,y)\,dy\,dx$.

84. Inverta a ordem de integração e calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_u^1\sqrt{1-v^2}\,dv\,du$; (b) $\displaystyle\int_0^1\int_{\arcsin\,y}^{\pi/2}\cos\,x\,\sqrt{1+\cos^2\,x}\,dx\,dy$;

(c) $\displaystyle\int_0^3\int_{y^2}^9 y\,\cos\,\left(x^2\right)\,dx\,dy$; (d) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}\,dx\,dy$; (e) $\displaystyle\int_0^1\int_{2\,x}^2 e^{y^2}\,dy\,dx\,.$

85. Calcule $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA$, sendo

(a) $f(x,y) = x\,y - 1$; $\quad R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq x^2\ \wedge\ x \geq y^2\right\}$;

(b) $f(x,y) = x^2y^2$; $\quad R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq\ 1/x,\ y \geq x,\ y \leq 2\,x,\ y \leq 2/x\right\}$;

(c) $f(x,y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{se} \quad x + y \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x + y > 1 \end{cases}$; $\quad R = [\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$;

(d) $f(x,y) = 4\,y/(x^3 + 8)$; $\quad R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq 4,\ y/2 \leq x \leq 2\right\}$;

(e) $f(x,y) = e^{x/y}$; $\quad R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x \leq y^3,\ y \leq 2,\ y \leq x\right\}$;

(f) $f(x,y) = x\,\sqrt{y^2 - x^2}$; $\quad R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1\right\}$;

(g) $f(x,y) = |\,x + y\,|$; $\quad R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\,x\,| \leq 1,\ |\,y\,| \leq 1\right\}$;

(h) $f(x,y) = 1/\sqrt{6 - x}$; $\quad R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3,\ (x-3)^2 + (y-3)^2 \geq 9\right\}$.

Mudança de variável no integral duplo.

86. Calcule os seguintes integrais passando a coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\iint_D x\ dxdy$ $\quad$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq x, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } x^2 + y^2 \geq 4\}$;

(b) $\displaystyle\iint_D dxdy$ $\quad$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)^3/2\ dy\ dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx$;

(e) $\displaystyle\iint_D dxdy$ $\quad$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } y \leq \sqrt{3}x\}$.

87. Considere o integral duplo $I = \displaystyle\iint_D \frac{2xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}\ dxdy$ sendo D a região do primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ limitada por $y = 0$, $y = \sqrt{3}/3x$, $x^2 + y^2 = 1/4$ e $x^2 - y^2 = 1$.

(a) Mostre que, usando uma mudança para coordenadas polares se tem

$$I = \int_0^{\pi/6}\int_{1/2}^{1/\sqrt{\cos 2\,\theta}} \frac{\sin 2\,\theta}{\sqrt{\cos 2\,\theta}}\,dr\,d\theta\,.$$

(b) Calcule o valor de I.

(c) Inverta a ordem de integração no integral iterado da alínea anterior.

88. Usando uma mudança de coordenadas conveniente, calcule:

(a) $\displaystyle\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}\ dxdy$ onde D é o triângulo limitado pelas rectas de equação $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 2$;

(b) $\displaystyle\iint_D (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dxdy$ onde D é o polígono de vértices nos pontos de coordenadas $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$;

(c) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (4x^2+y^2 \leq 4 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0)\}$.

89. Usando a mudança de coordenadas definida por $x+y=u$, $y=uv$, mostre que

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)}\, dy\, dx = 1/2\,(e-1).$$

Algumas aplicações do integral duplo: Áreas de regiões planas.

90. Determine, usando integrais duplos, as áreas dos domínios planos definidos por:

(a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 6x - x^2 \text{ e } y \geq x^2 - 2x\}$;

(b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^{-x},\ y \leq e^x \text{ e } 0 \leq x \leq 2\}$;

(c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x,\ y \leq \sqrt{3}x \text{ e } y \geq x\}$;

(d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 \leq 1,\ y \leq x \text{ e } y \geq 0\}$;

(e) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4+y^2 \geq 1,\ x^2/4+y^2/9 \leq 1,\ y \leq x,\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$;

(f) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x \text{ e } y \geq 2x-4\}$;

(g) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+4y \leq 5,\ xy \geq 1 \text{ e } y \geq 0\}$.

91. Usando integrais duplos, calcule a área de $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ (x-1)^2+y^2 \leq 1 \text{ e } y \geq 0\}$.

92. Considere o integral iterado $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{\arcsin r}^{\arccos r} r\, d\theta\, dr$.

(a) Inverta a ordem de integração no integral dado.

(b) Esboce, no plano XOY, a região R cuja área é dada pelo integral I.

(c) Calcule a medida da área de R.

93. Considere a região $\mathbf{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4, x^2+y^2 \leq -4x, x^2+y^2 \leq 4y\}$.

(a) Represente-a graficamente.

(b) Diga quais dos seguintes integrais iterados representa a medida da área da região $\mathbf{R}$:

i. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \int_{4\sin\theta}^{-4\cos\theta} r\, dr\, d\theta$;

ii. $\displaystyle\int_0^2 \int_{\arccos(-r/4)}^{\pi-\arcsin(r/4)} r\, d\theta\, dr$;

iii. $\displaystyle\int_0^2 \int_{\arcsin(r/4)}^{\arccos(-r/4)} r\, d\theta\, dr$;

iv. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{4-(y-2)^2}}^{-2+\sqrt{4-y^2}} dx\, dy + \int_1^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-2+\sqrt{4-y^2}} dx\, dy$;

v. $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{4-(x+2)^2}} dy\, dx + \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \int_{2+\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\, dx$;

vi. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{4-(y-2)^2}}^{-2+\sqrt{4-y^2}} dx\, dy + \int_1^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-2+\sqrt{4-y^2}} dx\, dy$;

vii. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{5/6\pi}\int_0^2 r\,dr\,d\theta + \int_{5/6\pi}^{\pi}\int_0^{4\sin\theta} r\,dr\,d\theta;$

viii. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2/3\pi}\int_0^{-4\cos\theta} r\,dr\,d\theta + \int_{2/3\pi}^{5/6\pi}\int_0^2 r\,dr\,\theta + \int_{5/6\pi}^{\pi}\int_0^{4\sin\theta} r\,dr\,d\theta\,.$

(c) Calcule a medida da área de $\mathbf{R}$.

94. Seja R a região plana cuja medida da área, A, é dada, em coordenadas polares, por

$$A = \int_{\pi/4}^{\arctan 2}\int_0^{3\ \sec\,\theta} r\,dr\,d\theta\,.$$

(a) Exprima R em coordenadas cartesianas e ilustre a resposta com um esboço de R.

(b) Calcule o valor de A.

Volumes.

95. Usando integrais duplos, calcule o volume dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

(a) $x^2+y^2 \le 1\,,\ 0 \le z \le x+y\,;$

(b) $x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2\,;$

(c) $x^2/4+y^2 \le 1\,,\ 1 \le z \le 12-3x-4y\,;$

(d) $x^2+y^2+z^2 \le 4\,,\ x^2+y^2 \le 2x\,;$

(e) $x^2+y^2 \le 2z\,,\ x^2+y^2+z^2 \le 3\,;$

(f) $y \ge x^2\,,\ x \ge y^2\,,\ 0 \le z \le 3\,,;$

(g) $(z-16)^2 \le x^2+y^2\,,\ x^2+y^2 \le 4\,;$

(h) $z \le 2-(x^2+y^2)\,,\ y+z \ge 2\,.$

96. Seja $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+z^2 \le 1,\ x^2+z^2 \le y^2 \text{ e } 0 \le y \le 2\}$. Determine o volume de E usando integrais duplos.

Massa, Momentos e Centro de Massa.

Sendo L uma lâmina fina, ocupando uma região R do plano e cuja densidade é dada pela função $\rho(x,y)$, contínua em R, então:

- A massa total m de L é dada por $m = \displaystyle\iint_R \rho(x,y)\,dxdy\,;$
- Os momentos M_x e M_y, de L, em relação respectivamente ao eixo OX e ao eixo OY, são dados por
$$M_x = \iint_R y\,\rho(x,y)\,dxdy \quad \text{e} \quad M_y = \iint_R x\,\rho(x,y)\,dxdy\,;$$
- O centro de massa de L é o ponto de coordenadas (x_0,y_0) dadas por $x_0 = M_y/m$ e $y_0 = M_x/m\,.$

97. Utilizando integrais duplos, determine a massa, m, os momentos M_x e M_y e o centro de massa $C(x_0,y_0)$, de uma lâmina T, cuja densidade em cada ponto $P(x,y)$ de T é dada por $\rho(x,y)$, quando:

(a) T é um triângulo rectângulo isósceles, cujos catetos medem a, e $\rho(x,y)$ é directamente proporcional ao quadrado da distância de P ao vértice do ângulo recto;

(b) $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y \le 1 \wedge x \ge 0\}$ e $\rho(x,y) = x + y$;

(c) $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\}$ $(a \in \mathbb{R}^+)$ e $\rho(x,y)$ é a distância de P ao ponto $O(0,0)$;

(d) $T = [0,3] \times [0,2]$ e $\rho(x,y) = xy^2$.

Integral triplo. Cálculo do integral triplo em coordenadas cartesianas.

98. Calcule $\displaystyle\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, em cada um dos seguintes casos:

(a) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y + z \le 1 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0\right\}$ e $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$;

(b) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \le 4 \wedge z \le 2\left(1 - y^2\right) \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0 \wedge z \ge 0\right\}$ e $f(x,y,z) = x\,y$;

(c) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \le 3 - x^2 - y^2 \wedge x^2 + y^2 \le 1 \ \wedge\ z \ge 0\right\}$ e $f(x,y,z) = x + y$.

99. Considere o integral triplo $I = \displaystyle\iiint_E x\,dx\,dy\,dz$ escrito na forma $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{4x-y^2}/2} x\ dz\ dy\ dx$.

(a) Inverta a ordem de integração de modo a que a primeira integração se faça em ordem a
i. x; ii. y.

(b) Calcule o valor de I.

Mudança de variável.

100. Usando uma mudança de variável conveniente calcule os seguintes integrais triplos

(a) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}\ dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}$;

(b) $\displaystyle\iiint_D \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\ dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9\}$;

(c) $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ dxdydz$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \wedge x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1\}$;

(d) $\displaystyle\iiint_D y\ dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \wedge z \ge -\sqrt{x^2 + y^2}\}$;

(e) $\displaystyle\iiint_D z\ dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le z^2 \le 2z - x^2 - y^2\}$;

(f) $\displaystyle\iiint_D \sqrt{1 - (x^2/4 + y^2 + z^2/9)}\ dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 \le 36\}$;

(g) $\displaystyle\iiint_D \left((y+z)^2 - x^2\right)\ dV$ com $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -1 \le x+y+z \le 1 \wedge -2 \le -x+y+z \le 4 \wedge -2 \le 3x + z \le 3\}$.

101. Considere o integral triplo I escrito na seguinte forma $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2-1}^{2 - r\cos\theta} 4r^2 \sin\theta\ dz\ dr\ d\theta$.

(a) Calcule o valor de I;

(b) Represente graficamente o domínio de integração E;

(c) Escreva I como um integral iterado usando coordenadas cartesianas.

102. Considere o integral descrito em coordenadas esféricas por $T = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^3 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$. Escreva T como um integral iterado em coordenadas cartesianas.

Aplicações do integral triplo. Volumes.

103. Usando integrais triplos, calcule o volume das regiões de $\mathbb{R}^3$ definidas por:

(a) $x^2+y^2+z^2 \le r^2$, $r>0$;

(b) $x^2+y^2 \le 1$, $-1 \le z \le 1$;

(c) $x^2+y^2 \le (z-1)^2$, $0 \le z \le 1$;

(d) $x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$;

(e) $x^2+y^2+z^2 \le 8$, $z^2 \ge x^2+y^2$;

(f) $x^2+y^2+z^2 \le 4$, $x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4$.

104. Determine o volume dos seguintes sólidos

(a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2 \text{ e } x^2+y^2-z^2 \le 1\}$;

(b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 2z, \ x^2+y^2+z^2 \le 3 \text{ e } y \ge x\}$.

Massa, Momentos e Centro de Massa.

Sendo E um sólido cuja densidade é dada pela função $\rho(x,y,z)$, contínua em E, então:

- A massa total é dada por $m = \iiint_E \rho(x,y,z)\, dxdydz$;
- Os momentos em relação aos planos coordenados YOZ, XOZ e XOY são dados, por $M_{yz} = \iiint_E x\rho(x,y,z)\, dxdydz$, $M_{xz} = \iiint_E y\rho(x,y,z)\, dxdydz$, $M_{xy} = \iiint_E z\rho(x,y,z)\, dxdydz$;
- O centro de massa, (x_0,y_0,z_0) com $x_0 = M_{yz}/m$, $y_0 = M_{xz}/m$ e $z_0 = M_{xy}/m$.

105. Determine a massa do sólido $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$, sabendo que a densidade, em cada ponto, é directamente proporcional ao quadrado da distância desse ponto à origem.

106. Supondo que o sólido V limitado pelas superficíes de equações $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = x^2+y^2$ é homogéneo, determine as coordenadas do centro de massa e o momento em relação ao plano XOY.

107. Determine as coordenadas do centro de massa de $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 5-x^2-y^2 \text{ e } x^2+y^2 \ge 1\}$, sabendo que $\rho(x,y,z) = k|z|$.

108. Considere o sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, \ y \ge \sqrt{3}x, \ z^2 \ge 4(x^2+y^2) \text{ e } 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$. Determine a massa total de S, sabendo que a densidade em cada ponto (x,y,z) de S, é dada por $\rho(x,y,z) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$.

109. Seja E o sólido definido por $z^2 \geq 4(x^2+y^2)$, $x^2+y^2+(z-6)^2 \geq 17$, $0 \leq z \leq 5$. Calcule a massa total de E, sabendo que a densidade, em cada ponto (x,y,z) de E, é proporcional à distância desse ponto ao plano de equação $z=6$.

Integral curvilíneo: Integral curvilíneo de funções escalares.

110. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_C y^2\, ds$, onde C é a curva de equações paramétricas $x=t$ $y=e^t$, $t \in [0,1]$;

(b) $\displaystyle\int_C 1/(x-y)\, ds$, onde $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 4,\ x \in [0,4]\big\}$;

(c) $\displaystyle\int_C x - y\, ds$, onde $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \big(y = x^2 \vee y = 4\big) \wedge |x| \leq 2\big\}$;

(d) $\displaystyle\int_C x\,y\, ds$, onde $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-6x-4y+12=0\big\}$.

111. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_C x+y+z\, ds$, onde C é a curva de equações paramétricas $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$;

(b) $\displaystyle\int_C y\,z\, ds$, onde C é o segmento de recta que une os pontos $(0,0,0)$ e $(0,1,2)$;

(c) $\displaystyle\int_C x^2\, ds$, onde C é a curva de intersecção do cilindro de equação $x^2/9 + y^2/25 = 1$ com o plano de equação $3z + 4x = 1$;

(d) $\displaystyle\int_C x^2\, ds$, onde $C = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge x+y+z=0\big\}$.

112. Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ as curvas de equações paramétricas $x = 2\cos t$ $y = 3\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ e $x = 2\cos 4t$ $y = 3\sin 4t$, $t \in [0,2\pi]$, respectivamente.

(a) Faça um esboço de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$; (b) Mostre que $\ell(\mathcal{C}_2) = 4\,\ell(\mathcal{C}_1)$.

113. Seja $\mathcal{C}$ a curva definida por $\mathcal{C} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge x+z=1\big\}$.

(a) Determine equações paramétricas de $\mathcal{C}$; (b) Calcule o comprimento de $\mathcal{C}$.

114. Calcule a área da superfície S definida por

(a) $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathcal{C} \wedge 0 \leq z \leq x^2\big\}$, onde $\mathcal{C} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \wedge y \geq 0\big\}$;

(b) $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathcal{C} \wedge 0 \leq z \leq |y|/\sqrt{3-2x}\big\}$, onde $\mathcal{C}$ é o arco da curva de equação $2(1-x) = y^2$ que une os pontos $A(0,-\sqrt{2})$ e $B(0,\sqrt{2})$.

115. Pretendem-se caiar ambos os lados de uma cerca que tem por base a curva

$$\mathcal{C} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x/30)^{2/3} + (y/30)^{2/3} = 1 \text{ e } y \geq 0\Big\}$$

e em que a altura é dada em cada ponto $(x,y) \in \mathcal{C}$ por $a(x,y) = 1 + y/3$. Desprezando os encargos com a cal, e sabendo que o pintor leva 100 euros por caiar 25 u.a., determine o preço a que fica o trabalho.

116. Se $\mathcal{C}$ representa um fio fino de espessura desprezável, cuja densidade é dada pela função $\rho(x, y, z)$, contínua numa região $D \subseteq \mathbb{R}^3$ contendo $\mathcal{C}$, então a massa total, m, de $\mathcal{C}$ é dada por $m = \int_{\mathcal{C}} \rho(x, y, z)\, ds$, e o centro de massa do fio é o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ em que
$$x_0 = \int_{\mathcal{C}} x\, \rho(x, y, z)\, ds/m\,;\ y_0 = \int_{\mathcal{C}} y\, \rho(x, y, z)\, ds/m\,;\ z_0 = \int_{\mathcal{C}} z\, \rho(x, y, z)\, ds/m\,.$$
Um anel de arame, com a forma da curva de equação $x^2+y^2 = 9$, tem densidade $f(x, y) = |\,x\,|+|\,y\,|$. Determine a massa e o centro de massa do anel.

Integral curvilíneo de funções vectoriais. Cálculo e aplicações.

117. Calcule $\int_C F \cdot ds$ onde

   (a) $F(x, y) = (x^2 - y^2)\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ e C é o arco da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, orientada no sentido directo, que vai de $A(0, 2)$ a $B(2, 0)$;

   (b) $F(x, y, z) = (y + z)\hat{\imath} + (x + z)\hat{\jmath} + (x + y)\hat{k}$ e C é o arco da curva de equação $y = x^2$, $z = x^4$, que une os pontos $A(0, 0, 0)$ e $B(1, 1, 1)$ e orientada de A para B;

   (c) $F(x, y, z) = (2x - z)\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k}$ e C é a curva que se obtem por justaposição do segmento de recta de extremos $(0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0)$ com a curva parametrizada por $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t/\pi$, $0 \le t \le \pi$;

   (d) $F(x, y, z) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + z\hat{k}$ e C é a curva, orientada no sentido directo, definida por $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

118. Calcule os seguintes integrais curvilíneos:

   (a) $\int_C (y - \sin x)\, dx + \cos x\, dy$, onde C é o triângulo de vértices $P(0, 0)$, $Q(\pi/2, 0)$ e $R(\pi/2, 1)$, orientado no sentido positivo;

   (b) $\int_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$, onde C é a elipse definida por $x^2 + y^2 = 1$ e $x + z = 1$.

119. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x, y, z) = x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} - z\hat{k}$, no deslocamento ao longo da curva C definida por $z = y^4$, $x = 1$, desde $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

120. Considere as duas superfícies de equações $S_1 :\ x^2+2y^2+z^2 = 4$ e $S_2 :\ z = \sqrt{3}$, e seja Γ a linha de intersecção de S_1 com S_2. Calcule o trabalho realizado pelo campo $G(x, y, z) = -y^2\hat{\imath}+xy\hat{\jmath}+(z^2+1)\hat{k}$, para deslocar uma partícula material ao longo da curva Γ, orientada no sentido directo.

Campos conservativos. Independência do caminho.

121. Calcule $\int_C (e^x \sin y + 3\,y)\ dx + (e^x \cos y + 3\,x - 2\,y)\ dy$, onde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4\,x^2+y^2 = 4 \wedge x \le 0\}$, orientada de $(0, 2)$ para $(0, -2)$.

122. Seja $F(x, y, z) = y\,z\,\hat{\imath} + x\,z\,\hat{\jmath} + x\,y\,\hat{k}$.

 (a) Determine um potencial g para F, i.e. $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal $\nabla g = F$ em $\mathbb{R}^3$.

 (b) Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$ onde $\mathcal{C}$ é a curva definida parametricamente por
 $r(t) = e^t \sin t\,\hat{\imath} + t^2 e^{3t}\,\hat{\jmath} + \cos^3 t\,\hat{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

123. Calcule $\displaystyle\int_C (y - x^2)\, dx + x\, dy$, onde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ (y = 2x - x^2 \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (x + 3y = 4 \wedge 1 \leq x \leq 4)\}$, e está orientada de $A = (4, 0)$ para $B = (0, 0)$.

124. Determine a função $\phi(x)$, com primeira derivada contínua, que se anula para $x = 2$ e tal que o integral $\displaystyle\int_C 2y\, dx + \phi(x)\, dy$ é independente do caminho de integração .

125. Seja Γ a curva que se obtém por justaposição da curva definida por $x^2 + y^2 = 4$, e $x \geq 0$ e $y \geq 0$, orientada de $A(0, 2)$ para $B(2, 0)$, com a curva definida parametricamente por $x = 2 - 2t$, $y = 4t^2 - 8t$, $t \in [0, 1]$. Calcule $\displaystyle\int_\Gamma e^{x^2}\, dx + (1 + y^2)\, dy$.

Teorema de Green.

126. Por aplicação do Teorema de Green, calcule o integral $\displaystyle\int_C -x^2 y\, dx + xy^2\, dy$, onde C é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, orientada no sentido directo.

127. Sendo $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq y^2 \text{ e } x \leq y^2/2 + 2\right\}$, use o Teorema de Green para calcular o integral $\displaystyle\iint_R y^2\, dxdy$.

128. Seja $K = \displaystyle\int_C y\, dx + e^y y^2\, dy$ onde C é a fronteira, orientada no sentido directo, da região plana R determinada pelas condições $x \leq 2$ e $y^2 \leq 2(x+2)$. Apresente o valor da área de R em função de K.

129. Considere o campo de vectores definido por $\vec{F}(x, y) = (1/\arccos x\,,\ x + 1)$, $(x, y) \in]-1, 1[\, \times \mathbb{R}$.
 Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}$ para deslocar uma partícula desde o ponto $A = (0, -1/2)$ até ao ponto $B = (0, 1/2)$, ao longo do arco de circunferência definido por $x^2 + y^2 = 1/4$ e $x \geq 0$.

130. Considere a região plana $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ y \geq x \text{ e } x^2 + y^2 \leq -2x\}$.

 (a) Calcule o valor da constante k dada por $k = \displaystyle\iint_R y\, dA$.

 (b) Sendo C a curva com orientação positiva, que é fronteira da região R, mostre que
 $$\int_C (x + 2y^2)\, dx + (xy + y^2)\, dy = -3k\,.$$

131. Considere a seguinte região plana $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \leq y \leq 1 - (x + 1)^2\}$ e a curva C que é a fronteira de R orientada positivamente.

(a) Usando uma parametrização, calcule, $\displaystyle\int_C -x^2\,dy - y^2\,dx$.

(b) Use o resultado anterior para determinar o volume do sólido $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in R \text{ e } 0 \le z \le y - x\}$.

132. Seja C a curva de equações paramétricas $x(t) = a\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$ e, $y(t) = a\sin t$, se $t \in [0, \pi]$ e $y(t) = 0$ se $t \in]\pi, 2\pi]$. Usando o Teorema de Green, determine $\underline{a}$ por forma a que
$$\int_C x\,dx + xy\,dy = 18\,.$$

133. Considere a curva $\mathcal{L}$ definida parametricamente por $r(t) = (\sin(2t)\cos t, \sin(2t)\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Calcule a área da região plana limitada por uma pétala de $\mathcal{L}$.

134. Considere a curva $\mathcal{C}$ definida parametricamente por $\phi(t) = (2\cos t - \sin t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Calcule a área da região plana limitada por $\mathcal{C}$.

(b) Calcule o valor de $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left(e^{\sqrt{x+10}} - y^2\right) dx + x^2\,dy$.

135. Seja r um parâmetro real positivo e diferente de $\sqrt{2}$. Discuta, para os diferentes valores de r, o valor de $\displaystyle\int_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, sendo C a curva plana de equação $(x-1)^2 + (y-1)^2 = r^2$.

136. Seja $F(x,y) = \dfrac{-y}{(x+1)^2+y^2}\,\hat{\imath} + \dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\,\hat{\jmath}$.

(a) Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} F \cdot ds$, onde $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36 \wedge x \ge 0\}$, orientada de $B = (0,-2)$ para $A = (0,2)$.

(b) Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{L}} F \cdot ds$, onde $\mathcal{L} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 36\}$, orientada no sentido directo.

Integral de superfície: Integral de superfície de campos escalares.

137. Sejam S_1 e , S_2 as superfícies definidas respectivamente por
$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}, \quad S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}.$$
Sem calcular o integral, diga se é positivo, negativo ou nulo o valor de:

(a) $\displaystyle\iint_{S_1} x\,dS$;

(b) $\displaystyle\iint_{S_1} e^z\,dS$;

(c) $\displaystyle\iint_{S_1} z\,dS$;

(d) $\displaystyle\iint_{S_1} z^2 + z\,dS$;

(e) $\displaystyle\iint_{S_1} x\,y\,dS$;

(f) $\displaystyle\iint_{S_1} x\,y\,z\,dS$;

(g) $\displaystyle\iint_{S_2} x\,dS$;

(h) $\displaystyle\iint_{S_2} e^z\,dS$;

(i) $\displaystyle\iint_{S_2} z\,dS$;

(j) $\displaystyle\iint_{S_2} z^2 + z\,dS$;

(k) $\displaystyle\iint_{S_2} x\,y\,dS$;

(l) $\displaystyle\iint_{S_2} x\,y\,z\,dS$;

(m) $\displaystyle\iint_{S_1} \left(e^{x^2+y^2+z^2-1} - 1001/1000\right) dS$; (n) $\displaystyle\iint_{S_2} \left(e^{x^2+y^2+z^2-1} - 1001/1000\right) dS$.

138. Calcule os seguintes integrais de superfície

(a) $\displaystyle\iint_S z^2\, dS$, onde S é a porção da superfície cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}$, limitada pelos planos $z=1$ e $z=3$;

(b) $\displaystyle\iint_S z\, dS$, onde S é o elipsóide de equação $x^2/4 + y^2 + z^2/9 = 1$;

(c) $\displaystyle\iint_S x^2\, dS$, onde S é a superfície de equação $r(\theta, z) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, z)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 2]$;

(d) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\, dS$, onde S é a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=4$;

(e) $\displaystyle\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS$, onde $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 5 \text{ e } 0 \leq z \leq 4\right\}$

(f) $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\, dS$, onde S é a reunião da porção do parabolóide $z = 1 - (x^2+y^2)$, situada acima do plano XOY, com a porção desse mesmo plano definida por $x^2+y^2 \leq 1$;

(g) $\displaystyle\iint_S x\, dS$, onde $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 2x \text{ e } 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

139. Considere a superfície S definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 4 \text{ e } 0 \leq z \leq x+3\}$. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\iint_S x^2\, dS$; (b) $\displaystyle\iint_S y^2\, dS$; (c) $\displaystyle\iint_S z^2\, dS$.

140. Considere a superfície S de equação paramétrica

$$r(\theta, \alpha) = (\cos\theta\,(3 + 2\cos\alpha), -\sin\theta\,(3+2\cos\alpha), 2\sin\alpha),\ \theta \in [0, 2\pi],\ \alpha \in [0, 2\pi].$$

Calcule $\displaystyle\iint_S z\, dS$.

Aplicações.

141. Calcule a área da superfície de S quando:

(a) S é uma superfície esférica de raio igual a $a > 0$;

(b) S é composta pela porção do parabolóide $x^2+y^2 = 4-z$, situada acima do plano XOY, e pela porção da superfície esférica $x^2+y^2+z^2=4$ situada abaixo desse mesmo plano;

(c) S é a superfície que limita o sólido Q definido por $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2-(z-6)^2 \leq 0 \text{ e } 0 \leq z \leq 6\}$.

142. Calcule a área da superfície S definida por:

(a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2+y^2 = 1, x+y \le z \le 9+2\,x-y\}$;

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, z = 9+2\,x-y, x^2+y^2 \le 1\}$;

(c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2+y^2+z^2 = 1, 0 \le x \le y/2, 1/2 \le z \le 1\}$.

143. Considere as seguintes superfícies $S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, y+z = 1, z \ge \sqrt{2\,x^2+2\,y^2}\right\}$, $S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, z = \sqrt{2\,x^2+2\,y^2}, y+z \le 1\right\}$.

(a) Determine uma parametrização para cada uma das superfícies.

(b) Calcule as áreas de S_1 e S_2.

144. Considere a superfície S (*toro*) representada parametricamente por

$$r(s,t) = (2\,\cos\,t + \cos\,t\,\cos\,s,\; -2\,\sin\,t - \sin\,t\,\cos\,s,\; \sin\,s)\,,\; s \in [\,0, 2\,\pi\,],\; t \in [\,0, 2\,\pi\,]\,.$$

(a) Calcule a área de S.

(b) Calcule $\displaystyle\iint_S x^2\,dS$.

Integral de superfície de campos vectoriais: Definição, propriedades e cálculo.

145. Considere as seguintes superfícies orientadas:

$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x = 0 \,\wedge\, (y,z) \in [\,0,3\,] \times [\,0,-3\,]\}$ e $\hat{n_1} = (1,0,0)$;
$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x = 0 \,\wedge\, (y,z) \in [\,0,3\,] \times [\,0,3\,]\}$ e $\hat{n_2} = (1,0,0)$;
$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, z = 0 \,\wedge\, (x,y) \in [\,0,4\,] \times [\,0,4\,]\}$ e $\hat{n_3} = (0,0,-1)$;
$S_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, z = 2 \,\wedge\, (x,y) \in [\,0,4\,] \times [\,0,4\,]\}$ e $\hat{n_4} = (0,0,-1)$;
$S_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, y = 0 \,\wedge\, (x,z) \in [\,0,3\,] \times [\,0,3\,]\}$ e $\hat{n_5} = (0,1,0)$;

Sem calcular o integral, diga se o fluxo de F através de S é positivo, negativo, ou nulo, quando

(a) $F(x,y,z) = z\,\hat{\imath}$;

(b) $F(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$.

146. Calcule $\displaystyle\iint_S F \cdot \hat{n}\,dS$ quando:

(a) $F(x,y,z) = y\,\hat{\imath} - x\,\hat{\jmath} + 8\,\hat{k}$ e S é a porção do parabolóide $z = 9-x^2-y^2$ que fica situada acima do plano XOY, com $\hat{n}$ dirigida para cima;

(b) $F(x,y,z) = x\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\,x^2\hat{k}$, sendo S a porção do parabolóide $z = x^2+y^2$, limitada pelas superfícies $x = 1-y^2$ e $x = y^2-1$, orientada com a normal $\hat{n}$ dirigida para baixo;

(c) $F(x,y,z) = -y\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} + z^4\hat{k}$ e S é a superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 4$, orientada com a normal $\hat{n}$ dirigida para dentro;

(d) $F(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$ e S é definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2+y^2 = 9 \,\wedge\, 0 \le z \le 2\}$, e orientada com a normal $\hat{n}$ a apontar para o exterior;

(e) $F(x,y,z) = e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}\left(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}\right)$ e S é a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2 = 1$, e $\hat{n}$ é o campo normal unitário que aponta para o exterior;

(f) $F(x,y,z) = x\,\hat{\imath}$ e S é a superfície definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge x^2+y^2 \leq z^2 \wedge z \geq 0\}$, orientada com a normal unitária $\hat{n}$ dirigida para o exterior;

(g) $F(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$ e S é definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2+z^2 = 4 \wedge 1 \leq z \leq 2\}$, e $\hat{n}$ é o campo normal unitário com componente segundo z positiva.

147. Calcule o integral de $F(x,y,z) = (y,-x,1)$ sobre a superfície S representada parametricamente por $r(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$, onde $t \in [0,1]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

148. Seja $F(x,y,z) = x\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} + yz\,\hat{k}$ o campo vectorial que representa a velocidade (em m/s) de uma corrente de fluido. Determine quantos metros cúbicos de fluido atravessam, por segundo, o plano XOY através do quadrado definido por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

149. Uma carga eléctrica q, colocada na origem, gera um campo eléctrico E dado por

$$E(x,y,z) = q\,(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k})/(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3 .$$

(a) Seja S_1 a superfície esférica com centro na origem e raio R, $R > 0$, orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}_1$. Determine o fluxo de E através de S_1.

(b) Seja S_2 a superfície definida por $S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 = R^2 \wedge -H \leq z \leq H\right\}$, $R > 0$, $H > 0$, orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}_2$. Mostre que o fluxo de E através de S_2 é dado por $4\pi q H/\sqrt{H^2+R^2}$.

(c) Seja S_3 a superfície definida por $S_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2 = R^2 \wedge -H \leq z \leq H\right\}$ $\cup \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = H \wedge x^2+y^2 \leq R^2\right\} \cup \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = -H \wedge x^2+y^2 \leq R^2\right\}$, com $R > 0$, $H > 0$, orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}_3$. Calcule, usando o resultado obtido na alínea anterior, o fluxo de E através de S_3.

3. Teoremas Fundamentais do Cálculo Vectorial

Teorema de Stokes e Teorema da Divergência.

150. Seja D um aberto de $\mathbb{R}^3$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que, se a é um vector constante, $\operatorname{div}(f\,a) = \nabla f \cdot a$.

151. Seja D um aberto de $\mathbb{R}^3$, $g : D \to \mathbb{R}$ e $F : D \to \mathbb{R}^3$ funções de classe C^1. Mostre que

$$\operatorname{div}(g\,F) = \nabla g \cdot F + g \operatorname{div} F .$$

152. Seja $E = r/\|r\|^p$ com $r = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k} \neq 0$.

(a) Obtenha uma expressão para $\operatorname{div} E$.

(b) Determine, caso exista, $p \in \mathbb{R}$ de modo que E seja incompressível.

153. O campo magnético gerado por um dipolo magnético com momento μ é dado por

$$B = -\mu/\|r\|^3 + 3\,(\mu \cdot r)\,r/\|r\|^5, \quad \text{com } r = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k} \neq 0 .$$

Mostre que $\operatorname{div} B = 0$.

154. Utilizando o Teorema da Divergência, calcule:

(a) $\displaystyle\iint_S (x\,y, y\,z, z\,x) \cdot \hat{n}\; dS$ onde S é composta pelas faces do tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 3$, e $\hat{n}$ é a normal unitária exterior a S;

(b) $\displaystyle\iint_S \left(x^2, y^2, z^2\right) \cdot \hat{n}\; dS$ onde $\hat{n}$ é a normal unitária exterior a S e

i. S é a superfície que limita o sólido $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\}$;

ii. S é a superfície que limita o sólido $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; 4(x^2 + y^2) \leq z^2 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\}$.

155. Considere o sólido V definido por $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \text{ e } z \geq 3\}$.

(a) Calcule o $\displaystyle\iiint_V z\, dV$.

(b) Seja $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ e } z \geq 3\}$ orientada com a normal unitária $\hat{n}_1$ com a componente segundo z positiva.

Utilizando o resultado da alínea anterior, calcule $\displaystyle\iint_{S_1} (x\,z, y\,z, 1) \cdot \hat{n}_1\; dS$.

156. Considere o sólido Q definido por $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } -1 \leq x \leq 2\}$.

(a) Calcule $\displaystyle\iiint_Q y^2 + z^2\, dV$.

(b) Seja $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; y^2 + z^2 = 1 \text{ e } -1 \leq x \leq 2\}$ orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}_1$. Seja $F(x, y, z) = 3\,x\,y^2\,\hat{\imath} + x\,e^z\,\hat{\jmath} + z^3\,\hat{k}$.

Utilizando o Teorema da Divergência, calcule $\displaystyle\iint_{S_1} F \cdot \hat{n}_1\; dS$.

157. Seja S a superfície definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; 2\,x = y^2 + z^2 \text{ e } x \leq 2\}$, orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}$.

(a) Sendo $F(x, y, z) = (1, 0, 3\,z)$, calcule $\displaystyle\iint_S F \cdot \hat{n}\, dS$.

(b) Usando o resultado da alínea anterior, calcule o volume do sólido
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; 2\,x \geq y^2 + z^2 \text{ e } x \leq 2\}$.

158. Seja $F = (F_1, F_2, F_3)$ com $F_3(x, y, z) = 2\,z$, um campo de vectores de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e tal que $\operatorname{div} F = 10$, e S a superfície definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 \leq z \leq 4\}$, orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}$. Determine o fluxo de F através de S.

159. Seja S a fronteira da região Q de $\mathbb{R}^3$ definida por $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2 + y^2 \leq 4, z \leq 6 - x^2 - y^2 \text{ e } 0 \leq z\}$. Seja ainda $F(x, y, z) = e^{xyz} \sin x\;\hat{\imath} + \cos(x + y + z) e^{x^2/2}\;\hat{\jmath} + \sin(e^{x^2 + y^2 + z})\;\hat{k}$. Determine $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \hat{n}\; dS$, sendo $\hat{n}$ a normal exterior a S.

160. (a) Calcule o volume do sólido Q determinado por $2z \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ e $x^2 + y^2 \leq z^2$.

(b) Seja $F(x,y,z) = (2x+y^2)\,\hat{\imath} + (3y+z^3)\,\hat{\jmath} + (4z+e^{x^4})\,\hat{k}$ e sejam ainda S a fronteira do sólido Q e $\hat{n}$ a normal exterior a S. Recorrendo ao resultado obtido na alínea anterior, determine o valor de $\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS$.

161. Seja S a fronteira da região D definida por $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z^2 \geq x^2+y^2 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \leq 2z\}$, e suponha S com orientação positiva. Seja ainda

$$F(x,y,z) = (e^{yz}\sin^2 z + x)\,\hat{\imath} + (e^{\sin x} - 3y)\,\hat{\jmath} + (z^2+2z+x\sin y e^{xy})\,\hat{k}\,.$$

(a) Calcule $\iint_S F\cdot\hat{n}\,dS$. (b) Calcule $\iint_S 3\,\mathrm{rot}\,F\cdot\hat{n}\,dS$.

162. Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = \dfrac{x\,\hat{\imath}+y\,\hat{\jmath}+z\,\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, através de S, sendo

(a) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+(y-3)^2+z^2 = 1\}$, orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}$.

(b) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 4\,x^2+9\,y^2+6\,z^2 = 36\}$, orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}$.

163. (a) Seja ϕ uma função harmónica num aberto W de $\mathbb{R}^3$. Seja $E\subseteq W$ uma região nas condições do Teorema da Divergência, e S a superfície fechada que limita E. Mostre que $\iint_S \nabla\phi\cdot dS = 0$.

(b) Seja $\phi(x,y,z) = 1/\big(x^2+y^2+z^2\big)^{1/2}$.

i. Mostre que ϕ é harmónica em $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

ii. Calcule $\iint_S \nabla\phi\cdot dS$, onde S é a fronteira de $Q = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z\leq 4-x^2-y^2 \wedge z\geq -2\}$.

164. Seja D um aberto de $\mathbb{R}^3$ e sejam $g\colon D\to\mathbb{R}$ e $F,G\colon D\to\mathbb{R}^3$, funções de classe C^2. Mostre que

(a) $\mathrm{rot}\,(\nabla g) = 0$.

(b) $\mathrm{rot}\,(g\,F) = g\ \mathrm{rot}\,F + \nabla g\times F$.

(c) $\mathrm{rot}\,(F+G) = \mathrm{rot}\,F + \mathrm{rot}\,G$.

165. Seja $S\subseteq\mathbb{R}^3$ uma superfície nas condições do Teorema de Stokes, orientada com a normal unitária $\hat{n}$, e $C = \partial S$, o bordo de S com a orientação induzida pela orientação de S. Sejam f e g funções de classe C^2 numa região D de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Prove que

(a) $\iint_S (\nabla f\times\nabla g)\cdot dS = \int_C (f\,\nabla g)\cdot ds = -\int_C (g\,\nabla f)\cdot ds$.

(b) $\int_C (f\,\nabla f)\cdot ds = 0$.

(c) $\int_C (f\,\nabla g + g\,\nabla f)\cdot ds = 0$.

166. Em cada uma das seguintes alíneas, use o Teorema de Stokes para transformar o integral de superfície $\iint_S \mathrm{rot}\,F\cdot dS$ num integral curvilíneo e calcule o seu valor.

(a) $F(x,y,z) = 2y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ e S é a superfície do parabolóide $z = 1-(x^2+y^2)$, situada acima do plano XOY, com a orientação canónica.

(b) $F(x,y,z) = y^2\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + xz\hat{k}$ e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\}$, com a orientação canónica.

(c) $F(x,y,z) = xz\hat{\imath} - y\hat{\jmath} - x^2y\hat{k}$, S é composta pelas 3 faces, não situadas no plano XOZ, do tetraedro limitado pelos 3 planos coordenados e pelo plano $3x+y+3z=6$, com orientação determinada pela normal unitária exterior do tetraedro.

167. Usando o Teorema de Stokes, mostre que cada um dos seguintes integrais curvilíneos tem o valor indicado. Em cada caso diga em que sentido é que é percorrida a curva C para obter o resultado pretendido.

(a) $\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = -\pi$, sendo C a circunferência $x^2+y^2=1\,,\quad z=0\,.$

(b) $\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi\sqrt{3}$, sendo C a curva de intersecção da superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 1$ com o plano $x+y+z=0$.

(c) $\displaystyle\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0$, sendo C a curva de intersecção da superfície cilíndrica $x^2+y^2=2y$ com o plano $y=z$.

168. Seja $F(x,y,z) = (x-1)\,\hat{\imath} - y\,\hat{\jmath}$ e S a superfície definida por $z = 4-y^2$ e $x^2+y^2 \leq 1\,.$

(a) Calcule $\displaystyle\iint_S F\cdot dS$ supondo S com orientação positiva;

(b) Use a alínea anterior para calcular $\displaystyle\int_C G\cdot ds$ com $G(x,y,z) = x^2\,\hat{\imath} + z\,\hat{\jmath} + xy\,\hat{k}$ e C a curva definida por $x^2+y^2=1 \quad z = 4-y^2\,.$

169. Seja $F(x,y,z) = (8yz-z)\,\hat{\jmath} + \left(3-4\,z^2\right)\,\hat{k}\,.$

(a) Mostre que $G(x,y,z) = 4yz^2\,\hat{\imath} + 3x\,\hat{\jmath} + xz\,\hat{k}$ é um potencial vectorial para F em $\mathbb{R}^3$, isto é que $\operatorname{rot} G = F$ em $\mathbb{R}^3\,.$

(b) Calcule $\displaystyle\iint_S F\cdot dS$ onde $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 25 \wedge z\geq 0\}$, orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}\,.$

170. A velocidade de uma corrente de fluido é dada por $F(x,y,z) = -\dfrac{y+xz}{(z^2+1)^2}\,\hat{\imath} - \dfrac{yz-x}{(z^2+1)^2}\,\hat{\jmath} - \dfrac{1}{z^2+1}\,\hat{k}\,.$

(a) Determine o fluxo de F através de $S_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=0 \wedge x^2+y^2\leq 1\}$, no sentido da normal unitária $\hat{n}_1 = -\hat{k} = (0,0,-1)\,.$

(b) Calcule a divergência de $F\,.$

(c) Calcule o fluxo de F através de $S_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge z\leq 0\}$, no sentido da normal unitária $\hat{n}_2$ com componente segundo z negativa.

(d) Sendo $G(x,y,z) = 1/2\,(y/(z^2+1)\,\hat{\imath} - x/(z^2+1)\,\hat{\jmath} - (x^2+y^2)/((z^2+1)^2)\,\hat{k})$, calcule $\operatorname{rot} G$.

(e) Usando os resultados das alíneas anteriores, calcule $\displaystyle\int_C G \cdot ds$, onde
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 1 \ \wedge\ z = 0\}$,
orientada no sentido horário.

171. Seja $F(x,y,z) = \left(-y + \cos\left(x^2\right)\right)\hat{\imath} + \left(x + \sin\left(y^2\right)\right)\hat{\jmath}$ e $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 1 \ \wedge\ z = 1/2\}$, orientada no sentido directo. Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot ds$.

172. Seja C a curva de intersecção do parabolóide de equação $x^2+y^2 = z$ com o plano de equação $4\,x + 2\,y + z = 1$, orientada de modo que a sua projecção no plano XOY seja percorrida no sentido horário. Sendo $F(x,y,z) = z\,\hat{\imath} + x\,\hat{\jmath} + y\,\hat{k}$, calcule $\displaystyle\int_C F \cdot ds$.

173. (a) Calcule o volume do sólido Q definido por $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le 1 \ \wedge\ 0 \le z \le y\}$.

(b) Usando o Terema de Stokes, calcule $\displaystyle\int_C F \cdot ds$, onde C é a curva definida parametricamente por $r(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $t \in [\,0, 2\,\pi\,]$, e $F(x,y,z) = \left(2xyz^2, 2x^2yz, e^{z^2}\right)$.

174. Considere a superfície S definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 4 \ \wedge\ z \ge -1\}$, e orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}$. Calcule $\displaystyle\iint_S \nabla \times G \cdot \hat{n}\, dS$, onde
$G(x,y,z) = x^2yz\,\hat{\imath} - z^3x^3\,\hat{\jmath} + \cos\left(z^5\right)\hat{k}$.

175. Seja S a superfície definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 4 \ \wedge\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$, orientada com a normal unitária exterior $\hat{n}$. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x,y,z) = \left(x^x + z^2, y^y + x^2, z^z + y^2\right)$, para deslocar uma partícula ao longo do bordo de S com orientação induzida pela orientação de S.

176. Considere o campo de vectores definido por $F(x,y,z) = yz^2\,\hat{\imath} + 2xz\,\hat{\jmath} + \cos(xyz)\,\hat{k}$, e a curva $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2+y^2 \ \wedge\ z = 10 - x^2 - y^2\}$, orientada no sentido positivo. Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot ds$.

177. Calcule $\displaystyle\int_C (y + \sin x)\, dx + \left(z^2 + \cos y\right) dy + x^3\, dz$, onde C é a curva definida por
$r(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$, $0 \le t \le 2\,\pi$.

178. Seja C uma curva fechada e S uma qualquer superfície, nas condições do Teorema de Stokes, que tem por bordo a curva C. Seja $F(x,y,z) = \left(ax^3 - 3xz^2, x^2y + by^3, cz^3\right)$.

(a) Determine $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ para os quais $\displaystyle\iint_S F \cdot dS$ é independente de S.

(b) Para $a = -1/3$, $b = 0$ e $c = 1$,

i. Determine um potencial vectorial, G, para F.

ii. Calcule $\displaystyle\int_C G \cdot ds$, onde $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \ \wedge\ z + 2 = 1/3\,(x^2+y^2)\}$, orientada no sentido directo.