



CONTEÚDO

Parte I. Noções Geométricas do Cálculo Diferencial	1
1. Limite e continuidade de funções vectoriais	1
1.1. Pontos, vectores e abertos	1
1.2. Exemplos de funções vectoriais	2
1.3. Limite e continuidade de funções vectoriais	3
2. Diferenciabilidade de funções vectoriais	5
2.1. Derivada parcial e gradiente. Interpretação geométrica	5
2.2. Diferenciabilidade	6
2.3. Polinómio de Taylor	11
3. Aplicações da diferenciabilidade	12
3.1. Teoremas da função implícita e da função inversa	12
3.2. Dependência funcional	14
3.3. Curvas e Superfícies diferenciáveis	15
4. Campos de vectores e curvas integrais	18
4.1. Sistemas de equações diferenciais	19
4.2. Equações com derivadas parciais lineares de primeira ordem	20
5. Equações com derivadas parciais de primeira ordem	21
5.1. Caso quasi-linear	21
5.2. Caso geral. Sistema de Charpit-Lagrange	23
5.3. Teorema de Kowalewsky-Cauchy	24
Exercícios de Revisão	25
Parte II. Cálculo Integral	31
6. Integral paramétrico definido	31
6.1. Definição	31
6.2. Propriedades do integral paramétrico	31

6.3. Aplicações	32
7. Integral paramétrico impróprio	33
7.1. Condições suficientes de convergência	33
7.2. Aplicações	33
8. Integrais Múltiplos	34
8.1. Conjuntos mensuráveis à Jourdan	34
8.2. Noção de integral múltiplo à Riemann	35
8.3. Fórmula de mudança de variável. Exemplos	38
9. Integrais curvilíneos	40
9.1. Integrais curvilíneos de funções reais	40
9.2. Integrais curvilíneos de funções vectoriais	43
9.3. Aplicações	43
10. Integrais de superfície	45
10.1. Integral de superfície de funções reais	45
10.2. Integral de superfície de funções vectoriais	46
10.3. Aplicações	46
11. Teorema de Gauss-Ostrogradsky	49
12. Teorema de Riemann-Green	50
12.1. Aplicações	51
13. Teorema de Stokes	52
13.1. Aplicações	52
Exercícios de Revisão	55
Índice	59

Parte I. Noções Geométricas do Cálculo Diferencial

1. LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES VECTORIAIS

1.1. Pontos, vectores e abertos. Desde o ponto de vista da *Álgebra Linear* podemos considerar $\mathbb{R}^n$ como um *espaço vectorial* ou como um *espaço afim*, mas que ninguém se assuste com este começo, pois isto não é mais de que uma forma aristocrática de dizer, que os seus elementos podem ser considerados como vectores ou como pontos. Ficará claro esta ambiguidade, denotando os pontos e os vectores com letras mais escuras.

Quando se fixa o sistema de referência canónico, cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, está representado pelas suas coordenadas. No caso dos pontos escreveremos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, enquanto que para vectores as convenções da álgebra linear exigem que estes sejam descritos por matrizes $n \times 1$ em vez de $1 \times n$, i.e. sejam vectores coluna. Por razões tipográficas seremos forçados a escrever $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]^t$, onde o superíndice t indica a operação de transposição. O símbolo $\mathbf{0}$ representará o ponto ou o vector com todas as suas coordenadas nulas. Além disso, no espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ podemos medir comprimentos e ângulos, através da noção de *produto interno* definido por $\mathbf{x}|\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y}$, pelo que $\mathbb{R}^n$ é um *espaço euclideano*. A *norma* de um vector $\mathbf{x}$ é dada por $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}|\mathbf{x}}$, e o *ângulo* entre dois vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é o número real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\mathbf{x}|\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\alpha$. Com estes conceitos podemos estabelecer uma geometria, que designaremos por $\mathbb{R}^n$ -*metria*, onde a *distância* entre dois pontos, está determinada pelo comprimento do vector que determinam, i.e. se $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, então a distância entre $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ é a função real de expressão analítica

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

Desta forma expressamos a nossa fé no importante teorema de pitágoras para além do caso bidimensional.

Enunciados todos estes entes matemáticos conhecidos, vamos pronunciar uma palavra que costuma causar pavor entre estudantes da Licenciatura em Matemática: *topologia*. Este conceito marca a diferença abismal entre o cálculo de uma e várias variáveis, e impede ou dificulta enormemente a escrita de um livro de este último tipo de cálculo, que satisfaça igualmente a estudantes com ambições utilitárias e a matemáticos agudos.

A dificuldade topológica em $\mathbb{R}^n$ reside no facto de para $n \geq 2$ existir muito espaço, que permite aos objectos geométricos que lá vivem o poder retorcer-se e desfocar de muitas formas, criando com tais contorcionismos uma variedade complexa.

Também as propriedades locais de $\mathbb{R}^n$, que são básicas para estudar a continuidade e diferenciabilidade, se vêm afectadas pelas mudanças qualitativas topológicas no caso

multidimensional. Por exemplo, os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ de uma peça só, são os intervalos, pelo que ao aproximar-nos de um ponto, somente podemos fazê-lo pela sua direita ou pela sua esquerda, se está na fronteira, e pelos dois lados se está no interior. No entanto, por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, não podemos aproximar-nos de $(0,0)$ por elementos do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq x^2\}$, pelo norte, pelo sul, pelo este, pelo oeste, ou por outra qualquer direcção linear (cf. figura 1). Desta forma, existem não somente infinitas direcções, mas também caminhos curvos que não nos podemos esquecer. Neste

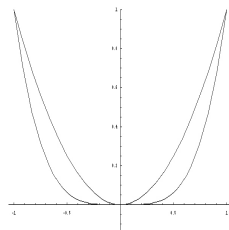


FIGURA 1. Conjunto A

curso não vamos estudar a estrutura de espaço topológico genérico, mas tão somente os abertos, que são as peças básicas, no caso particular de $\mathbb{R}^n$. Estes conjuntos são os que contêm de alguma forma o que podemos designar pela vizinhança de cada um dos seus pontos. Geometricamente são os que não contêm pontos da sua fronteira.

Definição 1.1. Definimos *bola aberta em $\mathbb{R}^n$* de centro $\mathbf{a}$ e raio r como o conjunto $B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\}$. A partir delas criamos a definição geral, i.e. dizemos que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto se para todo $\mathbf{a} \in U$, existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{a}) \subset U$.

1.2. Exemplos de funções vectoriais. Vamos apresentar alguns exemplos de funções reais de várias variáveis reais que correspondem a noções geométricas, físicas, algébricas ou puramente matemáticas, que os estudantes já conhecem.

Exemplo 1.1. A *área de um rectângulo* expressa-se em termos do comprimento, x , e da largura, y , por $s(x, y) = xy$. Da mesma forma, o *volume de um paralelepípedo rectângulo* vem dado por $v(x, y, z) = xyz$, onde x, y, z correspondem ao comprimento, largura e altura do paralelepípedo.

Exemplo 1.2. A fórmula $p v = R T$ expressa a relação entre o volume v de uma quantidade de gás à temperatura T e pressão p .

Exemplo 1.3 (Definição por composição). A função de expressão analítica

$$f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$$

está definida em $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, que é a esfera centrada em $(0, 0, 0)$ de raio 1.

Exemplo 1.4 (Soma Algébrica de funções). A função de expressão analítica

$$f(x, y, z) = \phi(x) + \phi(y) + \phi(z),$$

onde ϕ é uma função real de variável real definida em $[0, 1]$, está definida no cubo

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], y \in [0, 1], z \in [0, 1]\}.$$

Definição 1.2. Definimos *função vectorial*, $\mathbf{F}$, em $\mathbb{R}^m$ com domínio $D \subset \mathbb{R}^n$, $n, m \in \mathbb{N}$ a uma aplicação de D em $\mathbb{R}^m$ com expressão analítica

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

onde as funções f_j com $j = 1, \dots, m$ são reais, com domínio D .

Para representarmos o *gráfico* de funções reais de duas variáveis, f , num referencial ortonormado, $OXYZ$, i.e.

$$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\},$$

devemos começar por representar as suas *curvas de nível*, i.e a intersecção de $\mathcal{G}$ com planos paralelos a OXY . Bem como a intersecção com os planos OXZ ou OYZ .

Exemplo 1.5. Identifique geometricamente o gráfico da função real de duas variáveis reais, definida pela expressão analítica $f(x, y) = x^2 + y^2$.

As curvas de nível do gráfico de f são circunferências centradas na origem e raio $\sqrt{z_j}$ com $z_j \in \mathbb{R}^+$. Além disso, a intersecção do gráfico de f com o plano OXZ é a parábola $z = x^2$, e com o plano OYZ é a parábola $z = y^2$. Sendo assim, o gráfico de f é um *parabolóide de revolução*.

Vemos assim que é fundamental a introdução de conceitos geométricos como o de curvas e superfícies, bem como o de vectores, rectas e planos para o estudo de funções reais ou vectoriais de várias variáveis reais.

1.3. Limite e continuidade de funções vectoriais.

Definição 1.3. Sejam f uma função real definida num aberto D de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{a} \in D$. Dizemos que b é o *limite de f quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{a}$* , e denotamo-lo por $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$, se para toda a sucessão não constante de pontos de D , $(\mathbf{x}^n)$ que converge para $\mathbf{a}$, se tem que a sucessão $(f(\mathbf{x}^n))$ converge para b .

Observação (Limite de funções vectoriais). Na definição de limite de funções reais definidas em abertos $D \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que o vector de $\mathbb{R}^n$ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ tende para $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, quando e só quando $x_j \rightarrow a_j$ com $j = 1, \dots, n$. Da mesma forma dizemos que existe $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ onde $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ e $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ é uma função vectorial

definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{a} \in D$, se e somente se existirem os limites $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_j(\mathbf{x}) = b_j$ para $j = 1, \dots, m$.

Teorema (Cauchy). *Sejam $\mathbf{f}$ uma função vectorial definida num aberto D de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{a} \in D$. Uma condição necessária e suficiente para a existência do limite de $\mathbf{f}$ quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{a}$, é dada por*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| < \epsilon \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \text{ e } \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \delta).$$

Teorema (Sandwich). *Sejam f, f_+, f_- três funções reais definidas numa vizinhança do ponto $\mathbf{a}$, tais que $f_- \leq f \leq f_+$. Se existem os limites $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_-(\mathbf{x})$ e $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_+(\mathbf{x})$ e forem iguais, então existe o limite $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ e coincide com os limites anteriores.*

Observação. Este teorema tem uma versão vectorial, i.e. supondo que a função $\mathbf{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ com D aberto, tem expressão analítica $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, onde as funções f_j são reais definidas em D para $j = 1, \dots, m$. Se existirem funções f_j^+ e f_j^- tais que $f_j^- \leq f_j \leq f_j^+$ numa vizinhança de um ponto $\mathbf{a} \in D$, e os limites $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_j^-(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_j^+(\mathbf{x}) = \ell_j$ para $j = 1, \dots, m$, então existe o limite $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\ell_1, \dots, \ell_m)$.

Definição 1.4. Sejam $\mathbf{f}$ uma função vectorial definida num aberto D de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{a} \in D$. Dizemos que $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a}$ se para toda a sucessão $(\mathbf{x}^n)$ que converge para $\mathbf{a}$ em D , se tem que a sucessão $(\mathbf{f}(\mathbf{x}^n))$ converge para $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Teorema (Composição de funções). *Sejam $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ duas funções vectoriais definidas por*

$$\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{g}: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

com U e V abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Seja $\mathbf{a} \in U$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in V$. Se $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a}$ e $\mathbf{g}$ contínua em $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, então a função $\mathbf{h}$ definida de U para $\mathbb{R}^p$ por $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, é contínua em $\mathbf{a}$.

Teorema (Limite por curvas). *Sejam $\mathbf{f}$ uma função vectorial definida numa vizinhança do ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{h}$ uma função vectorial definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, e contínua em $t_0 \in I$ com $\mathbf{h}(t_0) = \mathbf{a}$, que designaremos por curva contínua. Existe o limite $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e é igual a ℓ , quando e só quando existir e for igual a ℓ o limite $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f} \circ \mathbf{h}(t)$, sobre todas as curvas contínuas $\mathbf{h}$ que passam por $\mathbf{a}$.*

Exemplo 1.6 (Limite direccionado). Sejam $\mathbf{f}$ uma função vectorial definida num aberto D de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in D$ e $\mathbf{w}$ um vector de norma um. Suponhamos que uma vizinhança de $\mathbf{a} \in D$, $U \subset D$, contém o segmento de recta de equação $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$ com $t \in]-t_0, t_0[$. Considere a função vectorial φ , definida em $] -t_0, t_0[$ por $\varphi(t) = \mathbf{f} \circ \mathbf{h}(t)$, onde $\mathbf{h}$ é a função vectorial definida em $] -t_0, t_0[$ por $\mathbf{h}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$. O limite $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)$ é um caso particular da definição anterior e será designado por *limite de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{a}$ segundo o vector $\mathbf{w}$* .

Observação . Ainda que não exista um algoritmo que nos permita decidir sobre a existência de limite, ou sobre a continuidade, de uma função num ponto, podemos começar por calcular os limites direccionais nesse ponto. Se o resultado alcançado depender da direcção ou do sentido do vector dado, então não existe limite. Caso contrário, teremos de procurar curvas mais complexas que os segmentos de recta dos limites direccionais ou tentar aplicar o teorema da sandwich.

Definição 1.5. Seja $\mathbf{f}$ uma função vectorial definida num aberto D de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\mathbf{f}$ é *uniformemente contínua* em $A \subset D$ se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \epsilon \iff (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta).$$

Exemplo 1.7. Seja f a função real de variável real definida em $]0, 1[$, com expressão analítica $f(x) = \sin(1/x)$. Sabe-se que f assim definida é contínua. Considerando a sucessão de pontos $x_n = 1/(n\pi + \pi/2)$, $n = 1, 2, \dots$ temos

$$f(x_{2n}) = 1, \quad f(x_{2n+1}) = -1 \quad \text{e} \quad x_{2n+1} - x_{2n} \rightarrow 0,$$

no entanto $|f(x_{2n+1}) - f(x_{2n})| = 2$, $n = 1, 2, \dots$, pelo que f não é uniformemente contínua.

Definição 1.6. Dizemos que $A \subset \mathbb{R}^n$ é um *compacto*, se toda a sucessão $(\mathbf{x}_n) \subset A$ tem uma subsucessão convergente com limite em A .

Teorema (Continuidade uniforme). *Seja f uma função real, definida e contínua sobre um conjunto compacto A . Então, as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *O conjunto $\{y \in \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = y, \mathbf{x} \in A\}$ é limitado;*
- (b) $\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A : \sup_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1) \quad \text{e} \quad \inf_{\mathbf{x} \in A} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_2);$
- (c) *f é uniformemente contínua.*

Observação . A condição (c) do teorema anterior é conhecido na literatura como teorema de Weierstrass.

2. DIFERENCIABILIDADE DE FUNÇÕES VECTORIAIS

2.1. Derivada parcial e gradiente. Interpretação geométrica. Considere-se a função de expressão analítica $z = f(x, y)$, definida num aberto $D \in \mathbb{R}^2$. Para y fixo, temos uma função real de variável real $z = f_y(x)$. À derivada desta função designamos por *derivada parcial de f relativamente a x* , e denotamo-la por $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$. Note-se que a derivada parcial é ainda uma função real de duas variáveis reais.

Para cada y fixo, o gráfico de $z = f_y(x)$ representa uma curva que é a intersecção do gráfico de $z = f(x, y)$ com o plano paralelo a OXZ e distando y unidades dele. Desta

forma, a *derivada parcial de f relativamente a x* , representa geometricamente o declive que a tangente à curva de equação $z = f_y(x)$ faz com a direcção positiva de OX .

Definição 2.1. Seja f uma função real de n variáveis reais $(x_1, \dots, x_n)$ definida num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Definimos *derivada parcial de f relativamente à variável x_j* , e denotamo-la por $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, a derivada da função real de variável real de expressão analítica

$$z = f_{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n}(x_j).$$

Vimos já que a derivada parcial de f relativamente a x_j nos dá a variação de f na direcção do eixo OX_j , para cada $j = 1, 2, \dots, n$. Faz então sentido definir derivada de f segundo uma qualquer direcção.

Definição 2.2 (Derivada direcciona). Sejam f uma função real definida num aberto D de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in D$ e $\mathbf{w}$ um vector de norma um. Suponhamos que uma vizinhança de $\mathbf{a} \in D$, $U \subset D$, contém o segmento de recta de equação $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$ com $t \in]-t_0, t_0[$. Considere a função real φ , definida em $]-t_0, t_0[$ por $\varphi(t) = f \circ \mathbf{h}(t)$, onde $\mathbf{h}$ é a função vectorial definida em $]-t_0, t_0[$ por $\mathbf{h}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$. À derivada $\varphi'(0)$ designamos por *derivada de f em $\mathbf{a}$ segundo o vector $\mathbf{w}$* , e denotamo-la por $\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{a})$.

2.2. Diferenciabilidade. Para estudar, como primeira aproximação, uma função real na vizinhança de algum dos seus pontos procuramos, caso exista, a função linear que melhor aproxima o seu incremento. Definido este objectivo analisemos um resultado que nos guiará no estudo que agora iniciamos.

Teorema (Incrementos finitos). *Seja f uma função real contínua definida num conjunto aberto D de $\mathbb{R}^n$. Se existem as derivadas parciais de primeira ordem de f em qualquer ponto de D , então dados $\mathbf{a} \in D$ e $\mathbf{b} \in B_r(\mathbf{a}) \subset D$, existem pontos $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n \in D$ e constantes reais $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que*

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{t}_1) + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{t}_n).$$

Demonstração. Começemos por relembrar a definição de *conjunto convexo*, i.e. conjunto que contém os segmentos de recta entre cada par de pontos do conjunto. Como exemplo de conjunto convexo temos $B_r(\mathbf{a}) \subset D$.

Considere os $n+1$ pontos de $B_r(\mathbf{a})$, $\mathbf{s}_j = (b_1, \dots, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$ com $j = 1, \dots, n-1$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Note que por definição $\mathbf{s}_0 = \mathbf{a}$ e $\mathbf{s}_n = \mathbf{b}$. Assim,

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = (f(\mathbf{s}_n) - f(\mathbf{s}_{n-1})) + (f(\mathbf{s}_{n-1}) - f(\mathbf{s}_{n-2})) + \dots + (f(\mathbf{s}_1) - f(\mathbf{s}_0)).$$

Definindo as n funções reais de variável real contínuas, φ_j com $j = 1, \dots, n$ por

$$\varphi_j : [\min\{a_j, b_j\}, \max\{a_j, b_j\}] \rightarrow \mathbb{R},$$

de expressão análítica $\varphi_j(t) = f(b_1, \dots, b_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$. A expressão anterior toma a forma

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n (\varphi_j(b_j) - \varphi_j(a_j)).$$

Tendo em atenção que $\varphi'_j(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(b_1, \dots, b_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$, $j = 1, \dots, n$, vemos que as funções φ_j são deriváveis no seu intervalo aberto de definição.

Aplicando o teorema do valor médio de Lagrange a cada uma das funções φ_j no intervalo $[\min\{a_j, b_j\}, \max\{a_j, b_j\}]$, temos que existe $l_j \in]\min\{a_j, b_j\}, \max\{a_j, b_j\}[$, $j = 1, \dots, n$ tais que

$$\varphi_j(b_j) - \varphi_j(a_j) = (b_j - a_j)\varphi'_j(l_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{l}_j^j),$$

onde no enunciado do teorema temos $\alpha_j = b_j - a_j$, e $\mathbf{t}_j = \mathbf{l}_j^j$ $j = 1, \dots, n$. *c.q.d.*

Estamos em condição de definir o conceito fundamental do Cálculo Diferencial.

Definição 2.3. Dizemos que a função real f definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ é *diferenciável em* $\mathbf{a} \in D$ se existem duas funções reais, uma linear que denotamos por $df(\mathbf{a})$ definida em $\mathbb{R}^n$, e a outra ϵ definida numa vizinhança da origem, $V \subset \mathbb{R}^n$, tais que

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h}), \quad \text{e} \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \epsilon(\mathbf{h}) = 0.$$

Nestas condições, dizemos que $df(\mathbf{a})$ é o *diferencial de f em $\mathbf{a}$* .

Observação .

- (1) Por definição de função linear, $df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tem expressão analítica $df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = [\alpha_1 \dots \alpha_n]|\mathbf{h}$, pelo que passaremos a denotar a expressão analítica de $df(\mathbf{a})$ por $df(\mathbf{a})\mathbf{h}$.
- (2) Se f é diferenciável em $\mathbf{a}$ existe uma única diferencial de f em $\mathbf{a}$.
- (3) Tomando limite quando $\mathbf{h}$ tende para $\mathbf{0}$ em ambos os membros da igualdade anterior vemos que se f é diferenciável em $\mathbf{a}$, é também contínua nesse ponto. O recíproco é falso, em geral. Dizemos assim, que *uma condição necessária de diferenciabilidade de uma função real f em $\mathbf{a}$ é que f seja contínua em $\mathbf{a}$* .
- (4) Tomando $\mathbf{h} = [h_1 \ 0 \dots 0]$ na definição anterior

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \alpha_1 h_1 + |h_1|\epsilon(h_1, 0, \dots, 0),$$

com $\lim_{h_1 \rightarrow 0} \epsilon(h_1, 0, \dots, 0) = 0$. Pelo que, dividindo ambos os membros por h_1 e

tomando o limite quando h_1 tende para zero, obtemos que $\alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})$.

Tomando $\mathbf{h} = [0 \dots 0 h_j 0 \dots 0]$ e procedendo como no caso anterior obtemos $\alpha_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$, $j = 1, \dots, n$.

(5) Se a função real de n variáveis reais for diferenciável em $\mathbf{a}$ então

$$df(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{h} \mapsto df(\mathbf{a})\mathbf{h} = \text{grad } f(\mathbf{a})|\mathbf{h}.$$

(6) Se f é diferenciável em $\mathbf{a}$, então a derivada direccional de f em $\mathbf{a}$ segundo um qualquer vector, $\mathbf{u}$, de norma um, vem dada por $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a})\mathbf{u}$, ou em notação matricial $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a})|\mathbf{u}$.

(7) **Interpretação geométrica do diferencial:** Dizemos que a superfície, S , de equação cartesiana $z = f(x, y)$ tem o plano, π , como *plano tangente* no ponto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S , se o ângulo que π faz com uma secante $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ onde $\mathbf{P} = (x, y, z) \in S$, tende para zero quando (x, y) tende para (x_0, y_0) . Assim, *f , como função real de duas variáveis reais, é diferenciável em (x_0, y_0) quando e só quando a superfície, S de equação $z = f(x, y)$ tem plano tangente em $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Neste caso, o plano π tem equação cartesiana*

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Problema 2.1. Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$f(x, y, z) = ax^2y + by^2z + cz^2x$. Determine as constantes a, b, c para que o valor máximo do módulo da derivada direccional no ponto $(1, 1, 1)$ seja 13, na direcção do vector $(1, 5, 0)$.

Resolução. Como a função f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ a derivada direccional de f segundo o vector $\mathbf{u} = (1, 5, 0)/\sqrt{26}$, vem dada por $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 1, 1) = (2a + c, a + 2b, b + 2c)|\mathbf{u}$, e é máxima quando o ângulo entre estes dois vectores for zero. Assim,

$$2a + c = \alpha, \quad a + 2b = 5\alpha, \quad b + 2c = 0, \quad \text{i.e.} \quad a = 2b = -c = \alpha,$$

e como a $\|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 1, 1)\| = 13$, i.e. $\|\text{grad } f(1, 1, 1)\| = \|(\alpha, 3\alpha, 0)\| = \sqrt{\alpha^2 + 9\alpha^2} = 13$ e portanto, $\alpha = 1/\sqrt{26}$. c.q.d.

Definição 2.4. Dizemos que a função vectorial $\mathbf{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in D$ se existem duas funções em $\mathbb{R}^m$, uma linear definida em $\mathbb{R}^n$ que denotamos por $d\mathbf{f}(\mathbf{a})$, e a outra ϵ definida numa vizinhança da origem, $V \subset \mathbb{R}^n$, tais que

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = d\mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{h}), \text{ e } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{h}) = \mathbf{0}.$$

Nestas condições, dizemos que a função $d\mathbf{f}(\mathbf{a})$ é o *diferencial de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{a}$* .

Observação . Tendo em atenção que $\mathbf{f}$ tem expressão analítica $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ onde as funções f_j são funções reais definidas em $D \subset \mathbb{R}^n$, a condição de diferenciabilidade reescreve-se como

$$f_j(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f_j(\mathbf{a}) = df_j(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon_j(\mathbf{h}), \quad j = 1, \dots, m,$$

e portanto $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{a}$ se e somente se as funções reais f_j o são, para todo o $j = 1, \dots, m$. Além disso, a matriz que representa o diferencial de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{a}$ vem dada por

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

e designa-se por *jacobiano* de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{a}$.

Definição 2.5. Seja $\mathbf{f}$ uma função vectorial em $\mathbb{R}^m$, definida num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$, por $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$. Dizemos que $\mathbf{f}$ é de *classe C^1 num ponto $\mathbf{a} \in D$* se as funções derivadas de primeira ordem de f_j com $j = 1, \dots, m$ forem contínuas em $\mathbf{a}$. Dizemos que $\mathbf{f}$ é de classe C^1 em D se esta propriedade se tiver em todos os pontos de D .

Teorema (Condição suficiente de diferenciabilidade). *Se $\mathbf{f}$ é de classe C^1 em $\mathbf{a} \in D$ onde D é um aberto de $\mathbb{R}^n$, então $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{a}$.*

Demonstração. Seguindo o processo descrito no teorema dos incrementos finitos e pela continuidade das funções derivadas parciais temos o resultado desejado. *c.q.d.*

Problema 2.2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x, y) = \frac{3x^2y - 2x^3}{x^2 + y^4}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } f(0, 0) = 0.$$

- (a) *Verifique que f admite em $(0, 0)$, derivada direccional segundo qualquer vector unitário.*
- (b) *Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$. Comente o resultado obtido.*

Resolução. (a) Por definição de derivada direccional de f segundo um vector $\mathbf{u}$ unitário, i.e $\mathbf{u} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ temos

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - f(0, 0)}{t},$$

pelo que $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \mathbf{u}} = 0$ se $\cos \alpha = 0$ e $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \mathbf{u}} = -2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha$ se $\cos \alpha \neq 0$.

- (b) As derivadas parciais de f em $(0, 0)$ vêm dadas por $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Assim, se f é diferenciável em $(0, 0)$ então a derivada direccional f segundo um

vector unitário $\mathbf{u}$ vem dado por $\frac{\partial f(0,0)}{\partial \mathbf{u}} = (-2, 0) | (\cos \alpha, \sin \alpha) = -2 \cos \alpha$. Como este resultado não coincide com o calculado em (a), pela alínea (6) da observação que aparece a seguir à definição 2.3, temos que f não é diferenciável. *c.q.d.*

Teorema (Composição de funções). *Sejam $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ duas funções vectoriais definidas por*

$$\mathbf{f} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

com U e V abertos em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Seja $\mathbf{a} \in U$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in V$. Se $\mathbf{f}$ é diferenciável em $\mathbf{a}$ e $\mathbf{g}$ diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, então a função $\mathbf{h}$ definida de U para $\mathbb{R}^p$ por $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$, é diferenciável em $\mathbf{a}$ e

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}).$$

Problema 2.3. *Seja f a função real definida em $\mathbb{R}^2$ por*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin(1/\sqrt{x^2 + y^2}) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) *Determine o seu domínio de continuidade.*
- (b) *Defina as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ indicando os respectivos domínios de continuidade.*
- (c) *Estude f quanto à diferenciabilidade.*

Resolução. (a) A função f é a composição das funções contínuas, g real de variável real definida em $\mathbb{R}$ com expressão analítica $g(x) = x^2 \sin(1/x)$, $x \neq 0$ e $g(0) = 0$, e a função real, h , definida em $\mathbb{R}^2$, com expressão analítica $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, $f = g \circ h$ em $\mathbb{R}^2$, e portanto é uma função contínua.

(b) As funções derivadas parciais estão definidas em $\mathbb{R}^2$ por $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e se $(x, y) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \sin(1/\sqrt{x^2 + y^2}) - x/\sqrt{x^2 + y^2} \cos(1/\sqrt{x^2 + y^2}), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \sin(1/\sqrt{x^2 + y^2}) - y/\sqrt{x^2 + y^2} \cos(1/\sqrt{x^2 + y^2}). \end{aligned}$$

Note-se que o cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e de $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ tem de ser efectuado por definição, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

Pode ver-se que as funções que acabámos de definir são contínuas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(c) Como a função h é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e g diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

A análise da diferenciabilidade de f no ponto $(0, 0)$ vai ser feita por definição:

$$f(h_1, h_2) - f(0, 0) = (h_1^2 + h_2^2) \sin(1/\sqrt{h_1^2 + h_2^2}),$$

assim $\epsilon(h_1, h_2) = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sin(1/\sqrt{h_1^2 + h_2^2})$. Verifica-se assim que f é diferenciável em $(0, 0)$ pois $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \epsilon(h_1, h_2) = 0$. *c.q.d.*

Observação . Acabámos de apresentar um exemplo de uma função diferenciável num ponto que não é de classe C^1 nesse ponto.

Problema 2.4. *Averigúe se a função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por*

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{cases} (x^2 + x^2 \sin(1/x), y) & , \quad x \neq 0 \\ (0, y) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Resolução. Aplique as ideias apresentadas na resolução do problema anterior. *c.q.d.*

2.3. Polinómio de Taylor. É sabido que para funções reais de variável real, f , uma *função analítica em $I \subset \mathbb{R}$* é aquela que admite uma representação em *série de Taylor*, uniformemente convergente numa vizinhança de cada ponto $x_0 \in I$, i.e.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \subset I.$$

Vejamos como estender este tipo de representações para funções reais de n variáveis reais. Para tal considere-se uma função real f analítica definida num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Defina-se para cada $\mathbf{x}^0 \in D$ a função auxiliar ϕ como a composição de f com a função vectorial $\mathbf{X}$ definida em $[0, 1]$ por $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ com $\mathbf{X}([0, 1]) \subset D$, i.e.

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \phi(t) = f(\mathbf{X}(t)). \end{aligned}$$

Assim, como ϕ é uma função real de variável real analítica, pois é a composição de funções analíticas f e $\mathbf{X}$, temos que

$$f(\mathbf{X}(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} t^n, \quad \{t \in \mathbb{R} : |t| < r\},$$

onde $\phi(0) = f(\mathbf{x}^0)$, $\phi'(0) = \text{grad } f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^t = d f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$,

$$\phi''(0) = d^2 f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \quad = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^t,$$

e mais geralmente,

$$\phi^{(n)}(0) = d^n f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \quad n = 0, 1, \dots$$

Tomando $t = 1$ e denotando $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ temos que a *série de Taylor de f em $\mathbf{x}^0$* vem dada por

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + d f(\mathbf{x}^0)\mathbf{h} + \frac{d^2 f(\mathbf{x}^0)\mathbf{h}}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(\mathbf{x}^0)\mathbf{h}}{n!} + \cdots,$$

e o polinómio de Taylor de ordem n de f em $\mathbf{x}^0$ é dado por

$$T_n(f; \mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}^0) + d f(\mathbf{x}^0) \mathbf{h} + \frac{d^2 f(\mathbf{x}^0) \mathbf{h}}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(\mathbf{x}^0) \mathbf{h}}{n!}.$$

Definição 2.6. À matriz da forma bilinear $d^2 f(\mathbf{x}^0)$, i.e.

$$\mathcal{H}_f(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^0}$$

designamos por *hessiana de f em $\mathbf{x}^0$* .

3. APLICAÇÕES DA DIFERENCIABILIDADE

3.1. Teoremas da função implícita e da função inversa. Dada uma função real diferenciável de duas variáveis reais, f , considere-se a equação $f(x, y) = 0$. Em geral esta equação define em $\mathbb{R}^2$ um conjunto que designaremos por *curva*. Estes conjuntos representam frequentemente gráficos de funções reais de variável real de expressão analítica $y = \phi(x)$ ou $x = \psi(y)$. Neste caso, dizemos que estas *funções*, ϕ, ψ , *estão definidas implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$* .

Exemplo 3.1. A equação $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ define, por exemplo, as funções de expressão analítica $f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ em $x \in]-r, r[$, e $f_2(y) = -\sqrt{r^2 - y^2}$ em $y \in]-r, r[$.

Note-se que uma equação pode não definir nenhuma função real de variável real, como é o caso de $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Teorema (Existência da função implícita). *Considere a função real, F , definida e contínua numa vizinhança do ponto $(\mathbf{a}, b)$. Se $F(\mathbf{a}, b) = 0$ e F é estritamente monótona considerada como função da variável y , então a equação $F(\mathbf{x}, y) = 0$ define y como função implícita de $\mathbf{x}$ numa vizinhança de $(\mathbf{a}, b)$, $U_{\mathbf{a}}$, i.e., existe uma única função real contínua, f , tal que*

$$b = f(\mathbf{a}), \quad F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}.$$

Observação . Se a condição de monotonia da função F considerada como função de y , for substituída por, *a função derivada parcial de F em ordem a y é contínua numa vizinhança de $(\mathbf{a}, b)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$, e existirem as derivadas parciais de F relativamente a x_j em $(\mathbf{a}, b)$, então existem as derivadas parciais de f , numa vizinhança de $\mathbf{a}$, e são dadas para $j = 1, \dots, n$, por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}.$$

Teorema (Diferenciabilidade da função implícita). *Seja a função real, F , definida e contínua numa vizinhança do ponto $(\mathbf{a}, b)$. Se $F(\mathbf{a}, b) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$ e F é diferenciável em $(\mathbf{a}, b)$, então a equação $F(\mathbf{x}, y) = 0$ define y como função implícita de $\mathbf{x}$, diferenciável, numa vizinhança de $(\mathbf{a}, b)$. Além disso, as derivadas parciais da função assim definida, $y = f(x_1, \dots, x_n)$, são tais que*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = - \left[\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})), \quad j = 1, \dots, n.$$

Observação . Desta forma se vê que as condições de regularidade de F passam directamente para a função definida implicitamente pela equação $F(\mathbf{x}, y) = 0$, i.e. se F é de classe C^k numa vizinhança de $(\mathbf{a}, b)$ então existe uma vizinhança de $\mathbf{a}$ onde f é de classe C^k .

Estes teoremas vão ser agora estendidos ao caso de $m \in \mathbb{N}$ equações.

Teorema (Funções implícitas). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ uma vizinhança de um ponto $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ e $\mathbf{F}$ uma função vectorial definida de U para $\mathbb{R}^m$, por $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, F_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, onde as funções F_j são reais, definidas em U . Se $\mathbf{F}$ é de classe C^1 em U , $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ e o determinante do jacobiano de $\mathbf{F}$ considerado como função de $\mathbf{y}$ é não nulo, i.e.*

$$\left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right| = \left| \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \neq 0$$

então a equação $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ define implicitamente $\mathbf{y}$ como função de $\mathbf{x}$, de classe C^1 numa vizinhança de $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, i.e existem uma vizinhança de $\mathbf{a}$, $U_{\mathbf{a}}$, e uma única função de classe C^1 , $\mathbf{f}$, em $\mathbb{R}^m$, definida em $U_{\mathbf{a}}$ por $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}$. Além disso, a matriz que representa o diferencial de $\mathbf{f}$ em $U_{\mathbf{a}}$,

$$J_{\mathbf{f}} = \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)},$$

vem dada por

$$J_{\mathbf{f}} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

ou em notação funcional $J_{\mathbf{f}} = - \left[\frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} \right]^{-1} \frac{\partial (F_1, \dots, F_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$.

Definição 3.1. Dizemos que a função $\mathbf{f}$ definida do conjunto C para D , é *bijectiva*, se cada elemento de D é a imagem de um só elemento de C . Neste caso definimos função

inversa de $\mathbf{f}$, e designamo-la por $\mathbf{f}^{-1}$ à função de D para C , que a cada elemento $\mathbf{d} \in D$ corresponde um único $\mathbf{c} \in C$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{d}$, e portanto $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{d}) = \mathbf{c}$ é equivalente a $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{d}$.

Vamos analisar a existência de inversa local de uma função vectorial, i.e. a existência de inversa na vizinhança de um ponto determinado de C , considerado aberto de $\mathbb{R}^n$.

Teorema (Função inversa). *Sejam $\mathbf{f}$ uma função de $V \subset \mathbb{R}^n$ definida e de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{a} \in U$. Se o jacobiano de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{a}$, $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$, for invertível, i.e. $|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})| \neq 0$, então $\mathbf{f}$ admite inversa local em $\mathbf{a}$, i.e. existem vizinhanças, $U_{\mathbf{a}} \subset U$ de $\mathbf{a}$ e $V_{\mathbf{b}} \subset V$ de $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ tais que $\mathbf{f}$ considerada como uma função de $U_{\mathbf{a}}$ em $V_{\mathbf{b}}$ é bijectiva. Além disso, a função $\mathbf{f}^{-1}$ inversa de $\mathbf{f}$ é de classe C^1 em $U_{\mathbf{a}}$ e tem-se*

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = [J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})]^{-1}, \quad J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = [J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))]^{-1}.$$

Problema 3.1. *Considere o sistema de equações*

$$e^{x-u} + yv + 3 = 0, \quad e^{y+v} - xu = 0.$$

- Mostre que o sistema define, nas condições do teorema das funções implícitas, (u, v) como função de (x, y) numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 2, 1, -2)$.*
- Calcule a matriz Jacobiana (ou o diferencial) da função, $\mathbf{g}$, definida na alínea anterior no ponto $(1, 2)$.*
- Justifique que $\mathbf{g}$ é localmente invertível e indique sem calcular $|J_{\mathbf{g}^{-1}}(1, -2)|$.*

Resolução. (a) Considere as funções reais f_1, f_2 definidas em $\mathbb{R}^4$ por $f_1(x, y, u, v) = e^{x-u} + yv + 3$, $f_2(x, y, u, v) = e^{y+v} - xu$, que são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^4$. Além disso,

$$f_1(1, 2, 1, -2) = 0 = f_2(1, 2, 1, -2)$$

e $\left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(1, 2, 1, -2) \right| = -1 \neq 0$, como queríamos demonstrar.

(b) Aplicando o teorema da função implícita temos

$$J_{\mathbf{g}}(x, y) = - \begin{bmatrix} e^{x-u} & v \\ -u & e^{y+v} \end{bmatrix}_{(x, y, \mathbf{g}(x, y))}^{-1} \begin{bmatrix} -e^{x-u} & y \\ -x & e^{y+v} \end{bmatrix}_{(x, y, \mathbf{g}(x, y))},$$

$$\text{e portanto } J_{\mathbf{g}}(1, 2) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \quad |J_{\mathbf{g}^{-1}}(1, -2)| = 1/|J_{\mathbf{g}}(1, 2)| = -1.$$

c.q.d.

3.2. Dependência funcional.

Definição 3.2. Sejam $D \in \mathbb{R}^n$ um aberto e $f_j, j = 1, \dots, m$ funções reais definidas em D de classe C^1 em D . Dizemos que $f_1, \dots, f_m$ são *funcionalmente dependentes em D* , se existir uma função real $F \not\equiv 0$ definida em $\mathbb{R}^m$ tal que

$$F(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) = 0, \quad \mathbf{x} \in D.$$

Dizemos que $f_1, \dots, f_m$ são *funcionalmente independentes em D* , se não forem funcionalmente dependentes.

Observação (Linearmente independente). Note-se que se um conjunto de funções é funcionalmente independente, então também é linearmente independente. No entanto o recíproco não se tem. De facto, as funções $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são linearmente independentes, mas verificam $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0, x \in \mathbb{R}$, pelo que existe uma função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não constantemente nula, tal que $F(\sin x, \cos x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Basta tomar F com expressão analítica $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Logo $\sin$ e $\cos$ são funcionalmente dependentes.

Teorema (Condição necessária). Sejam $D \in \mathbb{R}^n$ um aberto e $f_j, j = 1, \dots, m$ funções reais definidas em D de classe C^1 em D , com $m \leq n$. Se as funções f_j com $j = 1, \dots, m$ são funcionalmente dependentes em D , então o determinante do jacobiano das funções $f_1, \dots, f_m$ relativamente a m das n variáveis $x_1, \dots, x_n$ é nulo em D , i.e.

$$\left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})}(\mathbf{x}) \right| = 0, \quad \mathbf{x} \in D,$$

onde os $j_k \in \{1, \dots, n\}$ e são todos diferentes.

Definição 3.3. Seja A uma matriz de dimensão $m \times n$. Dizemos que A tem *característica* $r \leq \min\{n, m\}$ se todos os determinantes de ordem $r + 1$ que se podem formar com linhas e colunas de A , i.e. os *menores de ordem $r + 1$* , são nulos e existe um menor de ordem r não nulo.

Teorema (Condição suficiente). Sejam $D \in \mathbb{R}^n$ um aberto e $f_j, j = 1, \dots, m$ funções reais definidas em D de classe C^1 em D , com $m \leq n$. Se a característica do jacobiano da função vectorial, $\mathbf{G}$, definida em D por $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ é $r \leq m$, i.e. $\text{car } J_{\mathbf{G}} = r$, então para cada $\mathbf{a} \in D$ existe uma vizinhança $U_{\mathbf{a}} \subset D$ tal que r das funções $f_1, \dots, f_m$ são funcionalmente independentes e as $m - r$ restantes dependem funcionalmente das primeiras.

3.3. Curvas e Superfícies diferenciáveis. Definimos já o significado de curva contínua em $\mathbb{R}^n$ (cf. teorema limite por curvas). Vamos somente acrescentar que as *curvas* que considerarmos são de classe C^1 e *simples*, i.e. sendo $\mathbf{h}$ uma curva em $\mathbb{R}^n$ definida em $I \subset \mathbb{R}$ por $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t))$ onde as funções h_j são todas contínuas em I ,

$\|\mathbf{h}(t_1) - \mathbf{h}(t_2)\| \neq 0$, $t_1 \neq t_2 \in I$ ou admitem um número finito de pontos que não verifiquem esta condição que são designados por *pontos múltiplos*.

O vector $\mathbf{t} = \mathbf{h}'(t_0)$, $t_0 \in I$ de coordenadas $(h'_1(t_0), \dots, h'_n(t_0))$ é designado por *vector tangente à curva $\mathbf{h}$ em t_0* .

Definição 3.4. Sejam $f_1, \dots, f_n$ funções reais de classe C^1 definidas num aberto D de $\mathbb{R}^2$. Definimos *superfície diferenciável* $S \subset \mathbb{R}^3$ ao conjunto dos pontos $\mathbf{x}$ de coordenadas

$$x_1 = f_1(s, t), \quad x_2 = f_2(s, t), \quad x_3 = f_3(s, t), \quad (s, t) \in D,$$

para os quais a característica do jacobiano das funções f_j é igual a dois,

$$\text{car} \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(s, t)} = 2.$$

Observação . Nas condições anteriores sabemos pelo teorema da condição suficiente da secção 3.2, que existe numa vizinhança, $U_{\mathbf{a}} \subset S$, de cada ponto $\mathbf{a} \in S$, uma função F real de classe $C^1(U_{\mathbf{a}})$ tal que a *equação cartesiana* da restrição de S a $U_{\mathbf{a}}$ é dada $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ com $\|\text{grad } F\| \neq 0$.

Esta observação é fundamental, pois é um exercício simples demonstrar que um *vector normal a uma superfície* de equação cartesiana $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ num ponto $\mathbf{x}^0$ é $\mathbf{n} = \text{grad } F(\mathbf{x}^0)$. Na verdade basta tomar uma curva de classe C^1 , $C \subset S$ que contenha $\mathbf{x}^0$, de equação $x_j = g_j(t)$, $t \in I$, $j = 1, 2, 3$, i.e. $\mathbf{x}^0 = (g_1(t_0), g_2(t_0), g_3(t_0))$, para algum $t_0 \in I$. Então, $F(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) = 0$, $t \in I$, e diferenciando obtemos $\text{grad } F(g_1(t_0), \dots, g_n(t_0))|\mathbf{t} = 0$, onde $\mathbf{t}$ é o vector tangente à curva C em $\mathbf{x}^0$, logo um vector normal à superfície S em $\mathbf{x}^0$ é o vector $\text{grad } F(\mathbf{x}^0)$.

De forma geral temos que para superfícies em $\mathbb{R}^3$ o vector $\mathbf{n}$ normal a S em $\mathbf{x}^0 \in S$ é dado por

$$\mathbf{n} = \left(\left| \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(s, t)} \right|, - \left| \frac{\partial(f_1, f_3)}{\partial(s, t)} \right|, \left| \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(s, t)} \right| \right).$$

Problema 3.2. Um vector normal à superfície de equação $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ no ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi/4)$ é dado por $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)$.

Resolução. Vimos já que os vectores normais a uma superfície são múltiplos escalares do vector $\mathbf{n}$ definido anteriormente, considerando que

$$f_1(u, v) = u \cos v, \quad f_2(u, v) = u \sin v, \quad f_3(u, v) = v.$$

Assim, em cada ponto da superfície o vector normal é dado por $\mathbf{n} = (\sin v, -\cos v, u)$. O ponto dado é atingido quando $(u, v) = (1, \pi/4)$, assim $\mathbf{n} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)$. *c.q.d.*

Problema 3.3. Determine uma equação do plano tangente e da recta normal à superfície de equações paramétricas

$x = s + t, \quad y = s - t, \quad z = s^2 - t^2,$
em $(s, t) = (1, 0)$ e $(s, t) = (1, 1)$.

Resolução. As equações do plano tangente e da normal à superfície no ponto que corresponde aos parâmetros $(s, t) = (1, 0)$, i.e. o ponto de coordenadas $\mathbf{P}_0 = (1, 1, 1)$ são dadas em termos do vector $\mathbf{n}$ normal à superfície em $\mathbf{P}_0$ por

$$(x - 1, y - 1, z - 1)|\mathbf{n} = 0, \quad (x - 1, y - 1, z - 1) = t\mathbf{n}, \quad t \in \mathbb{R},$$

respectivamente.

Das considerações efectuadas aquando da resolução do problema anterior temos que o vector $\mathbf{n}$ é um múltiplo escalar de $(1, 1, -1)$. *c.q.d.*

Problema 3.4. *Determine as equações da recta tangente e do plano normal à curva C de equação cartesiana*

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47, \quad x^2 + 2y^2 = z,$$

no ponto $\mathbf{P}_0 = (-2, 1, 6)$.

Resolução. Temos de calcular um vector tangente à curva C no ponto $\mathbf{P}_0$, que denotaremos por $\mathbf{t}$. Começemos por ver que o ponto $\mathbf{P}_0$ pertence à curva. De facto,

$$2(-2)^2 + 3(1)^2 + (6)^2 = 47, \quad (-2)^2 + 2(1)^2 = 6.$$

A equações pedidas viriam dadas por:

$$\text{Recta tangente: } (x + 2, y - 1, z - 6) = \alpha\mathbf{t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Plano normal: } (x + 2, y - 1, z - 6)|\mathbf{t} = 0.$$

Determinação do vector tangente, $\mathbf{t}$.

Primeiro método: Suponha que a curva C está parametrizada por

$$x = X(s), \quad y = Y(s), \quad z = Z(s), \quad s \in I \subset \mathbb{R},$$

e que $\mathbf{P}_0 = (X(s_0), Y(s_0), Z(s_0))$. Então o vector tangente a C vem dado por

$$(X'(s_0), Y'(s_0), Z'(s_0)).$$

O cálculo destas derivadas faz-se a partir do sistema

$$4XX' + 6YY' + 2ZZ' = 0, \quad 2XX' + 4YY' - Z' = 0,$$

resultante das equações cartesianas da curva C, por derivação. Resolvendo este sistema obtemos

$$X'(s_0) = -\frac{4Z(s_0) + 3}{2X(s_0)}Z'(s_0), \quad Y'(s_0) = \frac{Z(s_0) + 1}{Y(s_0)}Z'(s_0),$$

pelo que um vector tangente a C em $\mathbf{P}_0$ viria dado por $\mathbf{t} = (27, 28, 4)$.

Segundo método: Determine dois vectores, $\mathbf{n}_1$, perpendicular à superfície de equação $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47$ no ponto $\mathbf{P}_0$, i.e. $\mathbf{n}_1 = (4x, 6y, 2z)_{\mathbf{P}_0}$, e outro $\mathbf{n}_2$, perpendicular à superfície de equação $x^2 + 2y^2 = z$ no ponto $\mathbf{P}_0$, i.e. $\mathbf{n}_2 = (2x, 4y, -1)_{\mathbf{P}_0}$. O vector

tangente a C em $\mathbf{P}_0$ vem dado pelo produto vectorial destes dois vectores, i.e.

$$\mathbf{t} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4x & 6y & 2z \\ 2x & 4y & -1 \end{vmatrix}_{\mathbf{P}_0}.$$

Assim, $\mathbf{t} = -2(27, 28, 4)$.

c.q.d.

4. CAMPOS DE VECTORES E CURVAS INTEGRAIS

Seja

$$\begin{aligned} F: D \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \end{aligned}$$

uma *função vectorial* ou *campo de vectores* de classe C^1 definida num domínio D e verificando $F(x, y, z) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Exemplo 4.1.

- (a) $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$, $D = \mathbb{R}^3$;
- (b) $F(x, y, z) = (x, y, z)$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$;
- (c) $F(x, y, z) = (y, -x, 0)$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$;
- (d) $F(x, y, z) = (xyz, (x+y)/z, \exp(x+y+z))$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$;
- (e) $F(x, y, z) = (x, 2y, -(x+2y))$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$.

Definição 4.1. Dizemos que $C \subset D$ é uma *curva integral* ou *linha de força* do campo de vectores F se C for tangente ao gráfico de F em cada um dos seus pontos. F diz-se também o *campo de direcções* que corresponde à família de curvas C .

Assim, as soluções do sistema

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = P, \quad \frac{dy}{dt} = Q, \quad \frac{dz}{dt} = R,$$

são as curvas integrais do campo de vectores F .

O sistema (1) pode descrever-se na forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{Q}{P}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}, \quad P \neq 0 \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{P}{Q}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{R}{Q}, \quad Q \neq 0 \\ \frac{dx}{dz} &= \frac{P}{R}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{Q}{R}, \quad R \neq 0 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Exemplo 4.2. As curvas integrais dos campos de vectores do exemplo 4.1 são as soluções dos seguintes sistemas:

$$(a) \frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0};$$

$$(b) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z};$$

$$(c) \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0};$$

$$(d) \frac{dx}{xyz} = \frac{dy}{(x+y)/z} = \frac{dz}{\exp(x+y+z)};$$

$$(e) \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-(x+2y)}.$$

4.1. Sistemas de equações diferenciais. Podemos descrever as curvas integrais associadas a um campo de vectores F como a intersecção de duas superfícies

$$(2) \quad u_1(x, y, z) = c_1, \quad u_2(x, y, z) = c_2.$$

Para tal as funções terão de verificar as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \text{grad } u_1 \times \text{grad } u_2 &\neq 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{grad } u_1|_F &= 0, \quad \text{grad } u_2|_F = 0. \end{aligned}$$

Observação . Note que se $\text{grad } u_1 \times \text{grad } u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ então u_1 e u_2 são funcionalmente independentes.

Definição 4.2. As funções u tais que $u \in C^1(D)$, são ditas *soluções integrais* do campo de vectores F se

$$(3) \quad P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad x \in D.$$

A equações do tipo (3) designamos por *equações com derivadas parciais lineares de primeira ordem*.

Teorema 4.1. *Sejam u_1, u_2 duas soluções integrais, funcionalmente independentes, associadas a F em D . Então as equações (2) descrevem o espaço das curvas integrais de F em D .*

Enunciemos alguns resultados fundamentais.

Teorema (Geração de soluções integrais).

- (a) *Seja f uma função real de variável real de classe C^1 e u uma solução integral de F em D . Então $w(x, y, z) = f \circ u(x, y, z)$ é ainda uma solução integral de F em D .*
- (b) *Seja g uma função real de duas variáveis reais, de classe C^1 e u, v duas soluções integrais de F em D . Então $w(x, y, z) = g \circ \phi(x, y, z)$ onde*

$$\begin{aligned}\phi: D \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (u(x, y, z), v(x, y, z)),\end{aligned}$$

é ainda uma solução integral de F em D .

4.2. Equações com derivadas parciais lineares de primeira ordem. Vamos ver que as curvas integrais têm um papel fundamental no estudo das equações com derivadas parciais de primeira ordem.

Teorema 4.2. *Sejam u_1, u_2 duas soluções integrais de F em D , funcionalmente independentes. Seja u uma qualquer solução de (3) e (x_0, y_0, z_0) um qualquer ponto de D . Então existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0, z_0) em D e uma função f de classe C^1 tal que*

$$(4) \quad u(x, y, z) = f \circ \phi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathcal{V}$$

onde $\phi(x, y, z) = (u_1(x, y, z), u_2(x, y, z))$.

Observação . Este resultado diz-nos que, localmente a solução geral de (3) vem dada por (4) para u_1, u_2 soluções funcionalmente independentes de (1).

Problema 4.1. *Determine a solução geral da equação*

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad x \in D.$$

Resolução. Considere-se o campo de vectores em $\mathbb{R}^3$, de expressão analítica $F(x, y, z) = (x, y, z)$ definido em $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\}$ e determinemos as curvas integrais de F , i.e. as soluções do sistema diferencial

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Pode ver-se que as curvas integrais são descritas por

$$y/x = c_1, \quad z/x = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Assim temos como exemplos de soluções integrais

$$u(x, y, z) = z/x, \quad yz/x, \quad x/z, \quad \sin(y/x), \quad \cos(z/x)^2.$$

A solução geral da equação vem então dada por

$$u(x, y, z) = f \circ \phi(x, y, z), \quad f \in C^1$$

e $\phi(x, y, z) = (y/x, z/x)$.

c.q.d.

5. EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Começemos por definir o objecto principal do nosso estudo.

Definição 5.1. Uma *equação com derivadas parciais de primeira ordem* nas variáveis independentes x, y, z , é uma relação da forma

$$(5) \quad G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

onde G é uma função de classe C^1 num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^5$, considerada nas variáveis x, y, z, p, q .

Uma *solução da equação com derivadas parciais*, de (5) é uma função $z = f(x, y)$ de classe C^1 que verifica:

- (a) Para cada $(x, y) \in D$, $(x, y, z, p, q) \in \Omega$;
- (b) $G\left(x, y, f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$.

5.1. Caso quasi-linear. Vamos analisar agora um caso particular de (5).

Definição 5.2. Uma *equação com derivadas parciais* do tipo

$$(6) \quad P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

é dita *quasi-linear*.

Note-se que neste caso a função G em (5) é linear nas variáveis p, q , i.e.

$$G(x, y, z, p, q) = P(x, y, z)p + Q(x, y, z)q - R(x, y, z).$$

Exemplo 5.1.

- (a) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$ – Caso não-linear.
- (b) $a(z) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ – Caso linear.
- (c) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$ – Equação de Euler.

(d) Seja g de classe C^1 com $\text{grad } g \neq 0_{\mathbb{R}^3}$; então $g(x, y, z) = c$, define uma família de superfícies diferenciáveis.

As superfícies ortogonais $z = f(x, y)$ a cada elemento desta família de superfícies verifica a equação com derivadas parciais

$$\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z},$$

que é quasi-linear.

Teorema (Solução do caso quasi-linear). *Seja $u \in C^1$ e suponhamos que em cada ponto da superfície $u(x, y, z) = 0$ as seguintes condições se verificam:*

(a) u verifica a equação (6).

(b) $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$.

então $u(x, y, z) = 0$ define implicitamente z como função de x, y , i.e. $z = f(x, y)$ e esta função é solução de (6).

Sejam u_1, u_2 funções funcionalmente independentes de classe C^1 que verificam (a) e (b) do Teorema anterior, então a solução geral de (6) vem dada por $u_1(x, y, z) = f \circ u_2(x, y, z)$, onde $f \in C^1$.

Problema 5.1. *Determine a solução geral de*

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Resolução. Para tal comecemos por determinar a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Vimos já (cf. problema 4.1) que a solução geral deste sistema vem dada por

$$y/x = c_1, \quad z/x = c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Assim, a solução geral da equação dada vem dada por $z = x f(y/x)$, $f \in C^1$. *c.q.d.*

Problema 5.2. *Determine a solução geral de*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(0, x) = 1 + x^2.$$

Resolução. Começemos por determinar a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-u} = \frac{du}{0}.$$

Assim, $u = c_1$ e $tu + x = c_2$ verificam este sistema, pelo que a solução geral do nosso problema vem dada por

$$u(t, x) = f(tu(t, x) + x), \quad f \in C^1.$$

Mas $u(0, x) = 1 + x^2$, e portanto, $f(s) = s^2 + 1$, i.e. u está definida implicitamente pela equação $u(t, x) = 1 + (tu(t, x) + x)^2$, i.e.

$$u(t, x) = \frac{2(1 + x^2)/t^2}{1 - 2tx + \sqrt{(1 - 2tx)^2 - 4(1 + x^2)}}.$$

é a solução do nosso problema.

c.q.d.

5.2. Caso geral. Sistema de Charpit-Lagrange. Toda a solução de classe C^1 da equação (5) é tal que

$$(7) \quad \frac{dx}{\frac{\partial G}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial G}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial G}{\partial p} + q\frac{\partial G}{\partial q}} = \frac{dp}{-(\frac{\partial G}{\partial x} + p\frac{\partial G}{\partial z})} = \frac{dq}{-(\frac{\partial G}{\partial y} + q\frac{\partial G}{\partial z})}$$

O sistema de equações diferenciais (7) é dito de *Charpit-Lagrange*.

Problema 5.3. *Será que as soluções de (5) e (7) coincidem?*

Resolução. A resposta é negativa, pois

$$\frac{dG}{ds} = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{dp}{ds} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{dq}{ds} = 0,$$

e portanto, $G(x, y, z, p, q) = c$ sobre qualquer solução de (7).

c.q.d.

No entanto, a resposta será afirmativa para problemas de valor inicial.

Problema 5.4. *Determinar a solução geral da equação*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Resolução. Neste caso $G(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - 1$ e o sistema de Charpit-Lagrange associado vem dado por

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2(p^2 + q^2)} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}.$$

Assim, $p = c_1$ e $q = c_2$, i.e. $\frac{\partial z}{\partial x} = c_1$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = c_2$. Daqui se conclui que $z(x, y) = c_1x + c_2y + c_3$ com $c_1^2 + c_2^2 = 1$.

c.q.d.

5.3. Teorema de Kowalewsky-Cauchy. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$(8) \quad \frac{d u}{d t} = f(t, u), \quad u(0) = u_0,$$

onde f é uma função analítica numa vizinhança do ponto $(0, u_0)$. Então, existe uma solução definida e analítica num intervalo contendo o ponto $t = 0$.

Método (Kowalewsky-Cauchy para equações diferenciais).

$u(0) = u_0$ – Condição inicial

$u'(0) = f(0, u_0)$ – por (8)

$u''(0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial u}(0, u_0)u'(0)$ – derivando em ordem a t , (8)

Procedendo desta forma obtemos $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$, que é uma série uniformemente convergente numa vizinhança da origem.

Considere-se agora o *problema de Cauchy*

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = G\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad u(0, x) = \phi(x)$$

Método (Kowalewsky-Cauchy para equações com derivadas parciais).

$u(0, x) = \phi(x)$

$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, x) = \phi^{(n)}(x)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = G(0, x, \phi(x), \phi'(x))$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x) = \frac{\partial G}{\partial t}(0, x, \phi(x), \phi'(x))$

$+ \frac{\partial G}{\partial z}(0, x, \phi(x), \phi'(x)) \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) + \frac{\partial G}{\partial p}(0, x, \phi(x), \phi'(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0, x)$

Nesta última expressão somente necessitamos calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0, x)$.

Para tal temos de derivar em ordem a x a equação (9).

Procedendo desta forma obtemos

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(0, x) \frac{t^n}{n!},$$

que é uma série uniformemente convergente numa vizinhança do ponto $(0, 0)$.

Problema 5.5. *Determine uma aproximação para a solução geral do seguinte problema*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(0, x) = 1 + x^2,$$

usando método de Kowalewsky-Cauchy

Resolução. A função $G(t, x, z, p) = zp$ é analítica pelo que podemos aplicar o método de Kowalewsky-Cauchy. Assim, procuremos a solução na forma

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(0, x) \frac{t^n}{n!}.$$

Agora, $u(0, x) = 1 + x^2$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, x) = 2x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, x) = 2$ e $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, x) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Com estes dados podemos começar a calcular

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 2x(1 + x^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) \frac{\partial u}{\partial x}(0, x) + u(0, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(0, x).$$

Como $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(0, x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0, x) \right)^2 + u(0, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, x)$, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 20x^4 + 6x^2 + 2. \text{ Assim,}$$

$$u(t, x) = 1 + x^2 + 2x(1 + x^2)t + (20x^4 + 6x^2 + 2) \frac{t^2}{2!} + \dots$$

Por este processo dificilmente obteríamos a solução exacta do problema que pode ser consultada no problema 5.2. *c.q.d.*

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. Para uma função f a função real definida em $\mathbb{R}^3$. Dê uma definição de:

- a) Diferenciabilidade de f num ponto $x_0 \in \mathbb{R}^3$.
- b) Extremo global.
- c) Matriz jacobiana e hessiana.

2. Seja $\vec{F}$ um campo de vectores de classe C^2 definido em $\mathbb{R}^3$.

- a) Defina rotacional de $\vec{F}$.
- b) Defina divergência de $\vec{F}$.
- c) Mostre que $\text{rot}(\text{rot} \vec{F}) = \text{grad}(\text{div} \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$, onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

3. Seja f uma função diferenciável em $(0, 0)$, e tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Calcule a derivada direcciona de f em $(0, 0)$ segundo os seguintes vectores:

- a) $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ com $\theta = \pi/6$.
- b) Na direcção do qual é máxima a derivada direcciona.
- c) Na direcção do qual é nula a derivada, indicando o vector.

4. Diga, **justificando** o valor lógico das seguintes afirmações:

- Seja f uma função real de várias variáveis reais. Então, f é contínua se e somente se f for diferenciável.
- Sendo $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x, y) = (x + y, x - y)$. Então ϕ^{-1} é bijectiva e $\phi^{-1}(x, y) = ((x + y)/2, (x - y)/2)$.
- Um vector normal à superfície de equação $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ no ponto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi/4)$ é $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)$.
- Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, e $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = f \circ \phi(x, y)$ e $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\phi(x, y) = (\log(x + y), \log(x - y))$. Se $\frac{\partial f}{\partial u}(\log 2, 0) = 1$, então $\frac{\partial F}{\partial x}(3/2, 1/2) + \frac{\partial F}{\partial y}(3/2, 1/2) = 1$.
- Seja f uma função real de várias variáveis reais, com derivadas parciais contínuas de primeira ordem. Então $\text{rot}(\text{grad} f) = 0$.
- Sendo $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^2 , então $\text{div}(\text{rot}(F)) = 0$.
- Sejam $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(x, y) = h \circ \psi(x, y)$. Sendo $\psi(x, y) = x^2 + y^2$, então $y \frac{\partial G}{\partial x} - x \frac{\partial G}{\partial y} = 0$.
- Seja f uma função real de variáveis reais. Se f não é diferenciável então f não é contínua.
- A função real de duas variáveis reais, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} & , y \neq x \\ \cos x & , y = x \end{cases}$$
 é contínua em $\mathbb{R}^2$.
- A função real de duas variáveis reais f definida por

$$f(x, y) = x^2(1 + \sin(1/x)) \text{ se } x \neq 0 \text{ e } f(0, 0) = 0$$
 é diferenciável em $(0, 0)$.

Indicação: Defina função diferenciável.

5. Considere o sistema de equações

$$e^{x-u} + yv + 3 = 0, \quad e^{y+v} - xu = 0.$$

- Mostre que o sistema define, nas condições do teorema das funções implícitas, (u, v) como função de (x, y) numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 2, 1, -2)$.
- Calcule a matriz Jacobiana (ou o diferencial) da função, g , definida na alínea anterior no ponto $(1, 2)$.

- c) Justifique que g é localmente invertível e indique sem calcular $|J_{g^{-1}}(1, -2)|$.
6. Seja C a curva de equação cartesiana
- $$z = x^3 + y, \quad \frac{3}{2}x^2 + y^2 = \frac{7}{4}.$$
- Verifique que
- $$x = \sqrt{7/6} \cos t, \quad y = \sqrt{7}/2 \sin t, \quad z = (7/6)^{3/2} \cos^3 t + \sqrt{7}/2 \sin t,$$
- $t \in [0, 2\pi]$ é uma parametrização da curva C . Calcule um vector tangente a C no ponto $(1, 1/2, 3/2)$.
7. Considere o sistema de equações $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, onde f_1 e f_2 são duas funções reais definidas em $\mathbb{R}^3$ por
- $$f_1(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 2, \quad f_2(x, y, z) = 2y + z - 2.$$
- a) Mostre que o sistema dado define, nas condições do teorema das funções implícitas, y, z como funções de x numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 2)$.
- b) Verifique que $\text{grad } f_1 \times \text{grad } f_2 \neq \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$, para todos os pontos que verificam o sistema dado.
- c) Justifique que o sistema dado define uma curva diferenciável C em $\mathbb{R}^3$, que passa pelo ponto $(0, 0, 2)$.
- d) Determine as equações paramétricas da recta tangente à curva C definida pelo sistema dado, no ponto $(0, 0, 2)$.
8. Considere a curva C de equações cartesianas
- $$z = -x^2 - y^2 + 2, \quad 2y + z = 2.$$
- Mostre que $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, $z = -2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, define uma parametrização da curva C .
9. Considere as funções reais, f_1, f_2, f_3 , definidas em $\mathbb{R}^3$, por
- $$f_1(x, y, z) = e^{-x} \cos y, \quad f_2(x, y, z) = -e^{-x} \sin y, \quad f_3(x, y, z) = z^2.$$
- a) Calcule o jacobiano da função $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de expressão analítica
- $$\mathbf{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)).$$
- b) Analise a dependência funcional das funções f_1, f_2, f_3 .
- c) Defina a função $g \equiv \text{div } \mathbf{F}$, i.e. indique o seu domínio, contradomínio e expressão analítica.
- d) Determine a equação cartesiana do plano tangente à superfície de equação $g(x, y, z) = 0$ no ponto $(-1, \pi/2, 0)$.
- e) Mostre que a equação $g(x, y, z) = 0$ define implicitamente, y como função de x, z numa vizinhança do ponto $(-1, \pi/2, 0)$.
- f) Calcule o gradiente da função h definida na alínea anterior no ponto de coordenadas $(-1, 0)$.

10. Determine o campo de direcções correspondente à família de curvas:

- a) $y = ax^2$, $x + y + z = b$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- b) $x - y - 2z = a$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- c) $z = ax^2$, $z^2 = bxy$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- d) Para as quais as superfícies equipotenciais são dadas por

$$x^2 + y^2 + cy = 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

11. Considere a família de superfícies de equação $f(x, y, z) = c$, onde $f \in C^1$. Determine o campo de direcções associado à família de curvas ortogonais a esta família de superfícies em cada um dos seus pontos.

12. Determine as curvas integrais dos seguintes campos de vectores definidos em domínios de $\mathbb{R}^3$:

- a) $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$;
- b) $F(x, y, z) = (x, y, z)$;
- c) $F(x, y, z) = (y, -x, 0)$;
- d) $F(x, y, z) = (xyz, (x + y)/z, \exp(x + y + z))$.

13. Resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais:

- a) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy(z^2 + 1)}$;
- b) $\frac{y dx}{y^2 + z^2} = \frac{dy}{xz} = -\frac{dz}{xy}$;
- c) $\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x - y}$;
- d) $\frac{dx}{x(y - z)} = \frac{dy}{y(z - x)} = \frac{dz}{z(x - y)}$.

14. Determine as soluções integrais dos seguintes campos de direcções que passam pelas curvas, C , indicadas:

- a) $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e $C: y = x + 1, z = x^2, x \in \mathbb{R}$;
- b) $F(x, y, z) = (x, -y, 0)$ e $C: x = t, y = t, z = t^2, t > 0$.

15. Determine a solução geral das seguintes equações com derivadas parciais lineares:

- a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;
- b) $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;
- c) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy(z^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$;
- d) $\frac{y^2 + z^2}{y} \frac{\partial u}{\partial x} + xz \frac{\partial u}{\partial y} - xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$;

$$e) \frac{\partial u}{\partial y} + 3y^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$f) x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z(x+y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$g) (y+z) \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (x-y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$h) x(y-z) \frac{\partial u}{\partial x} + (z-x)y \frac{\partial u}{\partial y} + z(x-y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

16. Mostre que a solução geral da equação

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

vem dada por $z(x, y) = x^n f(y/x)$ onde f é uma qualquer função de classe C^1 .

17. Determine a solução geral das seguintes equações quasi-lineares:

$$a) x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy;$$

$$b) u \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x;$$

$$c) x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = (x+y)u;$$

$$d) \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2;$$

$$e) x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (u^2 + 1)xy;$$

$$f) (y+z) \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (x-y);$$

18. Determine as soluções gerais das seguintes equações:

$$a) (y+z) \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (x-y), u(x, y) = 1+x;$$

$$b) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u, u \equiv \text{const. sobre a recta } x=t, y=0, t \in \mathbb{R}^+;$$

$$c) y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyu \text{ e } u \equiv t^2 \text{ sobre a recta } x=t, y=t, t \in \mathbb{R}^+;$$

$$d) u \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x \text{ e } u \equiv 2t \text{ sobre a recta } x=t, y=1, t \in \mathbb{R}.$$

19. Determine uma aproximação de ordem três para as solução dos seguintes problemas de valor inicial:

$$a) \frac{\partial u}{\partial t} = u^2 + \frac{\partial u}{\partial x^2}, u(0, x) = 1 + 2x;$$

$$b) u \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, u(0, x) = 1 + 2x - 3x^2;$$

$$c) y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2(x^2 - y^2)u,$$

d) $\frac{\partial u}{\partial t} = (\sin u) \frac{\partial u}{\partial x}, u(0, x) = \pi/6 + x;$

e) $\frac{\partial u}{\partial t} = \exp(tx) \frac{\partial u}{\partial x}, u(0, x) = 1 - x + x^2;$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \text{ e } u(0, y) = \exp(-y^2).$$

Parte II. Cálculo Integral

6. INTEGRAL PARAMÉTRICO DEFINIDO

6.1. Definição. Vamos aplicar resultados de cálculo diferencial ao estudo de funções de expressão analítica

$$(10) \quad f(x) = \int_a^b g(x, y) \, dy$$

onde g é uma função real definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. As funções do tipo (10), designamos por *integrais paramétricas*.

Observação . O estudo que aqui vamos realizar é também válido no caso em que g é uma função vectorial.

6.2. Propriedades do integral paramétrico. Começamos por enunciar, sem demonstração, alguns resultados fundamentais sobre integrais paramétricas.

Teorema (Continuidade de integrais paramétricos). *Seja g uma função contínua definida em $D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde D é um conjunto compacto. Então f definida por (10) é contínua em D .*

Teorema (Diferenciabilidade de integrais paramétricos). *Seja g uma função de classe C^1 definida em $D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde D é um conjunto compacto. Então f definida por (10) é diferenciável em D e*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x_j} \, dy, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema (Integrabilidade de integrais paramétricos). *Seja g uma função contínua definida em $D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde D é um conjunto compacto. Então é válida a seguinte igualdade*

$$\int_I f(x) \, dx = \int_a^b dy \int_I g(x, y) \, dx,$$

onde $I \subset \mathbb{R}^n$ tem a forma $I = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$.

Observação . Este resultado é válido para regiões $I \subset \mathbb{R}^2$ simultaneamente *vertical* e *horizontalmente simples*, i.e. I admite as seguintes representações

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

onde ϕ, ψ são funções contínuas em $[\alpha, \beta]$, e

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, h(y) \leq x \leq k(y)\},$$

onde h, k são funções contínuas em $[a, b]$, respectivamente.

6.3. Aplicações.

Problema 6.1 (Limites de integração variáveis). *Seja g uma função de classe C^1 definida em $D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde D é um conjunto compacto, e α, β duas funções reais de classe C^1 em D , verificando $a \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq b$, $x \in D$. Então f definida por*

$$f_1(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, y) \, dy,$$

é diferenciável em D e para $j = 1, 2, \dots, n$ temos

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g}{\partial x_j} \, dy + g(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta}{\partial x_j} - g(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}.$$

Resolução. Podemos escrever a função

$$f_1(x) = \int_a^{\beta(x)} g(x, y) \, dy - \int_a^{\alpha(x)} g(x, y) \, dy$$

pelo que

$$f_1(x) = F \circ \phi(x) - F \circ \psi(x), \quad \text{onde} \quad F(x, t) = \int_a^t g(x, y) \, dy.$$

e ϕ e ψ são funções definidas em D com contradomínio em $\mathbb{R}^2$, com expressão analítica $\phi(x) = (x, \beta(x))$ e $\psi(x) = (x, \alpha(x))$. Aplicando o teorema da derivada da função definida por composição obtemos o resultado desejado. *c.q.d.*

Problema 6.2. *Tendo em atenção que $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$, calcule os seguintes integrais*

$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad \int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Resolução. Como a função real definida em $\mathbb{R}^2$ de expressão analítica $g(x, a) = 1/(x^2 + a^2)$ é de classe C^1 podemos aplicar o teorema da diferenciabilidade de integrais paramétricos.

Assim,

$$\int_0^a \frac{-2a}{(x^2 + a^2)^2} \, dx + \frac{1}{2a^2} = -\frac{\pi}{a^2},$$

e portanto,
$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{2 + \pi}{8a^3}.$$

Tendo em atenção que g é de classe C^∞ podemos aplicar o mesmo resultado de forma repetida. *c.q.d.*

Problema 6.3. *Calcule os seguintes integrais*

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} \, dy, \quad J = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_{y^2}^1 \sqrt{x} \sin x \, dx.$$

Resolução. Qualquer das funções integrandas não é elementarmente primitivável, pelo que temos de inverter a ordem de integração. Podemos efectuar esta operação pois estamos nas condições do teorema da condição de integrabilidade dos integrais paramétricos.

Assim,

$$I = \int_0^1 e^{-y^2} y \, dy = \frac{e-1}{2e}, \quad J = \int_0^\pi x \sin x \, dx = \pi. \quad c.q.d.$$

7. INTEGRAL PARAMÉTRICO IMPRÓPRIO

7.1. Condições suficientes de convergência.

Definição 7.1. Seja g uma função real descontínua em $b \in \mathbb{R}$, considerada como função de y . O integral $\int_a^b g(x, y) \, dy$ é dito *uniformemente convergente sobre o conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$, para uma função f , se para cada $x \in A$ tivermos, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para $0 < b - t < \delta$ então

$$\left| \int_a^t g(x, y) \, dy - f(x) \right| < \epsilon.$$

Teorema (de Cauchy). *Seja g uma função que tem uma descontinuidade no ponto $b \in \mathbb{R}$. Uma condição necessária e suficiente de convergência do integral $\int_a^b g(x, y) \, dy$ sobre um conjunto A é que, para todo o $x \in A$,*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : 0 < b - y_1 < \delta, 0 < b - y_2 < \delta \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x, y) \, dy \right| < \epsilon, \text{ se } b \neq +\infty, \text{ e}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists c = c(\epsilon) > 0 : y_1 > c, y_2 > c \Rightarrow \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x, y) \, dy \right| < \epsilon, \text{ se } b = +\infty.$$

Teorema (Condição suficiente). *Seja g uma função que tem uma descontinuidade em $(x, b) \in A \times \mathbb{R}$. Uma condição suficiente de convergência do integral $\int_a^b g(x, y) \, dy$ sobre um conjunto A é que, exista uma função real ϕ com $|g(x, y)| \leq \phi(y)$, para $x \in A$, $y \in [a, b[$ e $\int_a^b \phi(y) \, dy < \infty$.*

Observação . Uma vez demonstrada a convergência uniforme do integral paramétrico impróprio, passam a aplicar-se as propriedades de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade dos integrais paramétricos.

7.2. Aplicações.

Problema 7.1. *Considere o integral $\int_0^\infty e^{-t} \cos(xt) \, dt$.*

(a) *Verifique que é uniformemente convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$.*

(b) Calcule $\int_0^\infty dt \int_0^1 e^{-t} \cos(xt) dx$.

Resolução.

(a) A convergência do integral é uma consequência imediata da desigualdade

$$|e^{-t} \cos(xt)| \leq e^{-t}, \text{ válida para todo o } x \text{ em } \mathbb{R}^+, \text{ e da convergência do integral } \int_0^1 e^{-t} dt.$$

(b) Invertendo a ordem de integração e tendo em atenção que

$$\int e^{-t} \cos(xt) dt = \frac{e^{-t}(-\cos(xt) + x \sin(xt))}{1+x^2},$$

obtemos

$$\int_0^\infty dt \int_0^1 e^{-t} \cos(xt) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx,$$

cujo valor é $\pi/4$.

c.q.d.

8. INTEGRAIS MÚLTIPLOS

8.1. Conjuntos mensuráveis à Jourdan. Para conjuntos em espaços multidimensionais, podemos introduzir noções análogas às de comprimento de um segmento. Surge assim a noção de medida de um conjunto.

Vamos introduzir a noção de medida em $\mathbb{R}^m$ para conjuntos simples, que designaremos por *paralelepípedos rectangulares multidimensionais*, A , i.e.

$$A = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : a_j \leq x_j \leq a_j + h_j, j = 1, \dots, m\}$$

Dizemos que a *medida de* A é dada por $M(A) = \prod_{j=1}^m h_j$. Para a união disjunta de para-

lelepípedos $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, temos $M(A) = \sum_{k=1}^n M(A_k)$. A *medida do conjunto vazio* é, por definição, zero.

Teorema (Propriedades da medida). *A medida de conjuntos elementares, i.e. que se decompõem em paralelepípedos rectangulares cuja intersecção é quando muito o bordo, verifica as seguintes propriedades:*

(a) $A \subset B \implies M(A) \leq M(B)$;

(a) A, B conjuntos elementares de $\mathbb{R}^m$ então

$$A + B = \{z \in \mathbb{R}^m : z = x + y, x \in A, y \in B\}$$

é elementar e $M(A + B) \leq M(A) + M(B)$.

(c) Se cortarmos um conjunto elementar A por hiperplanos ortogonais $x_j = c$ ficamos com dois paralelepípedos elementares A_1, A_2 tais que $M(A) = M(A_1) + M(A_2)$.

Esta noção permite-nos definir medida de um conjunto qualquer. Para tal considere-se num espaço de dimensão m (por exemplo $\mathbb{R}^m$), uma rede de *cubos*

$$P_N = \{x \in \mathbb{R}^m : k_j h \leq x_j \leq (k_j + 1)h, \ k_j = \pm 1, \dots, \ j = 1, \dots, m, \text{ e } h = 1/2^N, \ N \in \mathbb{N}\}.$$

Note que quando passamos da rede P_N para a P_{N+1} , cada cubo transforma-se em 2^m cubos.

Seja A um subconjunto limitado em $\mathbb{R}^m$. Considerem-se agora os conjuntos elementares $\bar{A}_N$, conjunto dos cubos que contêm A e pelo menos um ponto de $\mathbb{R}^m \setminus A$, e $\underline{A}_N$, conjunto dos cubos que contêm unicamente pontos do interior geométrico de A . Formamos assim duas sucessões de conjuntos tais que as sucessões $(M(\bar{A}_N))$ e $(M(\underline{A}_N))$ são monótonas decrescente e crescentes, respectivamente e $M(\underline{A}_N) \leq M(\bar{A}_N)$. Como as sucessões, $(M(\bar{A}_N))$ e $(M(\underline{A}_N))$ são limitadas, a primeira superiormente por $M(\bar{A}_1)$ e a segunda inferiormente por $M(\underline{A}_1)$, existem os limites

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M(\underline{A}_N) = M_i(A), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} M(\bar{A}_N) = M_e(A)$$

que designaremos por *medida interior de A* , $M_i(A)$ e *exterior de A* , $M_e(A)$.

Definição 8.1. Um conjunto, $A \subset \mathbb{R}^m$, é dito *mensurável à Jourdan* se $M_i(A) = M_e(A)$ e neste caso caso $M(A) = M_i(A) = M_e(A)$.

Teorema (Resultado fundamental de conjuntos mensuráveis). *Um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^m$ é mensurável à Jourdan quando e só quando, o seu bordo $\text{fr}(A)$ tiver medida de Jourdan nula, i.e. $M(\text{fr}(A)) = 0$.*

Teorema (Estabilidade de conjuntos mensuráveis).

- (a) *Sejam A um conjunto limitado de $\mathbb{R}^{m-1}$, mensurável à Jourdan e f uma função real contínua definida em A . Então o conjunto $A \times f(A)$ tem medida, M , nula.*
- (b) *Considere a sucessão de conjuntos mensuráveis à Jourdan, A_j , $j = 1, \dots, n$. Então, são também mensuráveis à Jourdan os conjuntos*

$$A = \bigcup_{j=1}^n A_j, \quad \bigcap_{j=1}^n A_j.$$

- (c) *Além disso, se os conjuntos A_j se não intersectarem, então $M(A) = \sum_{j=1}^n M(A_j)$.*

8.2. Noção de integral múltiplo à Riemann. Vamos começar por estender o conceito de integral a funções reais de várias variáveis reais definidas em regiões de $\mathbb{R}^n$.

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável à Jourdan e f uma função definida em A . Considere-se a partição, R , de A em conjuntos mensuráveis A_j cuja intersecção de

dois quaisquer elementos é quando muito o bordo. Em cada elemento, A_j , da partição considere-se um ponto ξ_j e formemos a *soma integral de f sobre R*

$$S_R(\xi) = \sum_{j=1}^{n-1} f(\xi_j) M(A_j), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Considere-se agora o maior dos *diâmetros dos $A_j \in R$* , i.e.

$$\Delta = \max_{j=1, \dots, n} \sup_{x, y \in A_j} \|x - y\|.$$

Dizemos que S é o limite das somas integrais, $S_R(\xi)$, quando $\Delta \rightarrow 0$, se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0: \forall R$ com $\Delta < \delta$ e $\xi_j \in A_j \implies |S_R(\xi) - S| < \epsilon$.

Desta forma, f é uma função *integrável à Riemann sobre A* , se as somas integrais desta função, S_R convergem para S quando $\Delta \rightarrow 0$. Designamos S por *integral múltiplo de f sobre A* e denotamo-lo por

$$S = \int_A f \, dx = \int_A f(x) \, dx_1 \dots dx_n.$$

Exemplo 8.1.

- (a) Se $f \equiv c$ sobre um conjunto mensurável A , então $\int_A f \, dx = c M(A)$.
- (b) Se A é um conjunto de medida M nula, i.e. $M(A) = 0$, então $\int_A f \, dx = 0$, mesmo se f não for limitada em A .

Observação . Para os integrais múltiplos, a integrabilidade de uma função sobre um conjunto, não nos diz que f seja limitada sobre esse conjunto. No entanto, vamos somente considerar nesta parte do curso de Cálculo III, funções limitadas sobre conjuntos mensuráveis.

Exemplo 8.2. Considere-se a superfície diferenciável de equação $z = f(x, y)$ definida numa região do plano XOY , D , e definimos o sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Calcule o volume de S .

Ideia de cálculo: Dividimos a região D em sub-regiões mediante uma rede quadriculada de lados paralelos a OX e a OY , que denotaremos por $D_1, D_2, \dots, D_n$. Em cada uma destas regiões escolhemos um ponto (ξ_i, η_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Formamos a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \text{Área}(D_k).$$

Seja agora Δ o maior dos *diâmetros dos conjuntos D_j* , $j = 1, \dots, n$,

$$\Delta = \max_{j=1, \dots, n} \sup_{x, y \in D_j} \|x - y\|.$$

O *volume de S* vem dado pelo seguinte limite

$$\text{Volume}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \text{Área}(D_k).$$

A este tipo de limites designamos por *integral duplo* de f sobre $D \subset \mathbb{R}^2$, e denotamo-lo por $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$. c.q.d.

Exemplo 8.3. A *massa*, M , de um *sólido* $S \subset \mathbb{R}^3$ de densidade ρ , função real contínua, definida sobre S , vem dada por

$$M = \iiint_S \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Observação . Os integrais múltiplos foram introduzidos por Euler e constituem um instrumento fundamental para várias áreas do conhecimento humano.

Teorema (Propriedades do integral). *Supondo que as funções dadas são integráveis nos conjuntos mensuráveis indicados, podemos enunciar:*

Linearidade: $\int_A (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, dx = c_1 \int_A f_1 \, dx + c_2 \int_A f_2 \, dx$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

União disjunta: $\int_A f \, dx = \int_B f \, dx + \int_C f \, dx$, onde $A = B \cup C$ onde $B \cap C \subset \text{fr}(B) \cap \text{fr}(C)$.

Monotonia: $\int_A f \, dx \leq \int_A g \, dx$ se $f(x) \leq g(x)$, $x \in A$.

Módulo: $\left| \int_A f \, dx \right| \leq \int_A |f| \, dx$

Valor médio: *Supondo $g(x) \geq 0$, $x \in A$, temos*

$$\int_A fg \, dx = \mu \int_A g \, dx, \quad \inf_{x \in A} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in A} f(x).$$

Além disso, se $g \equiv 1$, então $\int_A f \, dx = \mu M(A)$.

Podemos reduzir integrais múltiplos sobre espaços de uma determinada dimensão a uma sucessão de integrais sobre espaços de dimensão inferior, como nos é referido no teorema sobre integrabilidade de integrais paramétricos e na observação que lhe segue. Este processo vai ser designado por passagem de integrais múltiplos a *integrais iterados*.

Problema 8.1.

(a) Calcule $\iint_M x^y \, dx \, dy$ sendo $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b\}$.

(b) Mostre que $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx = \ln(b+1) - \ln(a+1)$.

Resolução.

(a) Começemos por expressar o integral duplo como integral iterado

$$\int_0^1 \ln x \, dx \int_a^b \frac{x^y}{\ln x} \, dy = \iint_M x^y \, dx \, dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \, dx.$$

Primitivando obtemos

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx = \iint_M x^y \, dx \, dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} \, dy.$$

Assim $\iint_M x^y \, dx \, dy = \ln(b+1) - \ln(a+1)$.

Note-se que a função integranda do primeiro integral não é elementarmente primitivável.

(b) Da resolução da alínea (a) temos a igualdade pretendida.

c.q.d.

8.3. Fórmula de mudança de variável. Exemplos.

Teorema (Mudança de variável no integral). *Sejam A e B domínios de $\mathbb{R}^p$ com B de medida finita (i.e. comprimento, área ou volume finitos). Sejam ainda, uma aplicação φ de classe C^1 , de B para A tal que o determinante do seu jacobiano, J , não se anula em pontos de B e f é integrável em A . Então, sendo $|J| = \det D\varphi$*

$$\int_A f \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_p = \int_{\varphi^{-1}(A)} f \circ \varphi |J| \, dt_1 \, dt_2 \dots dt_p.$$

8.3.1. Caso geral.

Problema 8.2. *Calcule o integral $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$ com $a > 0$, e $f(x, y) = (a^{2/3} - x^{2/3} - y^{2/3})^2$.*

Observação . Justifique que pode efectuar a mudança de variável, φ , definida por $x = u \cos^3 v$, $y = u \sin^3 v$.



FIGURA 2. Caso geral (transformação φ)

Resolução. Como se pode ver da análise da figura 2 a transformação apresentada é bijectiva de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^2$. Além disso, o determinante do seu Jacobiano, $|J| =$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 3u \cos^2 v \sin^2 v. \text{ Assim,}$$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 v \sin^2 v \, dv \int_0^a (a^{2/3} - u^{2/3})^{2/3} u \, du,$$

pelo que $I = 3a^{10/3}\pi/80$.

c.q.d.

8.3.2. *Coordenadas polares.* Considere-se a aplicação φ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(\theta, \rho) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta), \text{ com } a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ que é de classe } C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

O determinante do seu jacobiano é dado por $|J| = |D\varphi| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)} \right| = ab\rho$. Esta aplicação é bijectiva de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^2$.

Seja f uma função integrável em $D \subset \mathbb{R}^2$ então

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f \circ \varphi(\theta, \rho) ab\rho \, d\theta \, d\rho.$$

Observação . Esta mudança de coordenadas é aconselhável para descrever regiões do tipo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_1^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq r_2^2, \theta_1 \leq \arctan(bx/(ay)) \leq \theta_2\}.$$

Neste caso $D = \varphi([\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2])$ (cf. figura 3).



FIGURA 3. Coordenadas polares

8.3.3. *Coordenadas cilíndricas.* Considere-se a aplicação φ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(\theta, \rho, \zeta) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta, \zeta), \text{ com } a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ que é de classe } C^\infty(\mathbb{R}^3).$$

O determinante do seu jacobiano é dado por $|J| = |D\varphi| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \rho, \zeta)} \right| = ab\rho$. Esta aplicação é bijectiva de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$.

Seja f uma função integrável em $D \subset \mathbb{R}^3$ então

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\varphi^{-1}(D)} f \circ \varphi(\theta, \rho, \zeta) ab\rho \, d\theta \, d\rho \, d\zeta.$$

Observação . Esta mudança de coordenadas é aconselhável para descrever regiões do tipo

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq r_2^2, \theta_1 \leq \arctan(bx/(ay)) \leq \theta_2, \zeta_1 \leq z \leq \zeta_2\}.$$

Neste caso $D = \varphi([\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2] \times [\zeta_1, \zeta_2])$ (cf. figura 4).

8.3.4. *Coordenadas esféricas.* Considere-se a aplicação vectorial, φ , de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(\theta, \phi, \rho) = (a\rho \sin \phi \cos \theta, b\rho \sin \phi \sin \theta, c\rho \cos \phi),$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ que é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. O determinante do seu jacobiano

$$|J| = |D\varphi| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \phi, \rho)} \right| = abc\rho^2 \sin \phi$$

Esta aplicação é bijectiva de $[0, 2\pi] \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}^3$.

Seja f uma função integrável em $D \subset \mathbb{R}^3$ então

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\varphi^{-1}(D)} f \circ \varphi(\theta, \phi, \rho) abc\rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho.$$

Observação . Esta mudança de coordenadas é aconselhável para descrever regiões do tipo

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq r_2^2, \theta_1 \leq \arctan(bx/(ay)) \leq \theta_2, \phi_1 \leq \arctan(z/\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}) \leq \phi_2\}.$$

Neste caso $D = \varphi([\theta_1, \theta_2] \times [\phi_1, \phi_2] \times [r_1, r_2])$ (cf. figura 5).

9. INTEGRAIS CURVILÍNEOS

9.1. Integrais curvilíneos de funções reais.

Definição 9.1. Ao conjunto de pontos

$$\gamma = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m : x_j = X_j(t), t \in [a, b], j = 1, 2, \dots, m\}$$

onde as funções X_j são contínuas, para $j = 1 \dots, m$, designamos por *curva contínua* no espaço vectorial de dimensão m , $\mathbb{K}^m$.

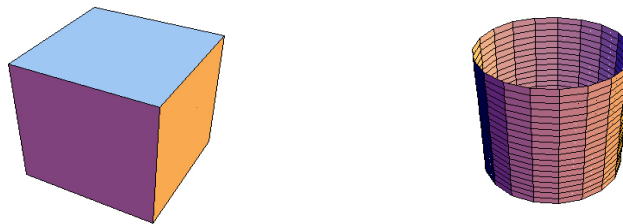


FIGURA 4. Coordenadas cilíndricas

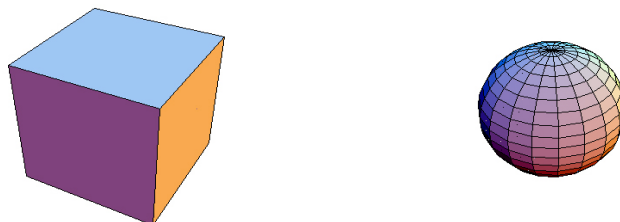


FIGURA 5. Coordenadas esféricas

Observação . Definimos assim, γ como o transformado do conjunto $[a, b]$ pela aplicação X definida por $X(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t))$. Vamos exigir a esta função que tenha quando muito um número finito de *pontos múltiplos*, i.e.

$$\text{dados } t_2, t_1 \in [a, b], \text{ com } t_2 \neq t_1 \implies \|X(t_2) - X(t_1)\| \neq 0.$$

Definição 9.2. Seja γ uma curva definida por $x = X(t)$ uma curva contínua. Consideremos a *partição*, R , do intervalo $[a, b]$, definida por $R \equiv a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e seja $\Delta = \max_{j=1, \dots, n} |t_j - t_{j-1}|$ o seu *diâmetro*. Se existir o limite

$$\ell(\gamma) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \|X(t_j) - X(t_{j-1})\|$$

e for independente da partição do intervalo $[a, b]$, dizemos que $\ell(\gamma)$ é o *comprimento da curva* γ e que a *curva* γ é *rectificável*.

Observação . Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 3$ temos que a norma de X dada por $\|X(t)\| = \sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t) + X_3^2(t)}$.

Teorema 9.1. *Seja γ uma curva rectificável. Se a função X' for integrável, então*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|X'(t)\| \, dt.$$

Observação . Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 3$ temos

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(X'_1(t))^2 + (X'_2(t))^2 + (X'_3(t))^2} \, dt.$$

A *curva* γ admite *infinitas representações* da forma $x = X \circ f(\tau)$, onde f é uma função real diferenciável em $[\alpha, \beta]$, $f'(\tau) \neq 0$ em $[\alpha, \beta]$ e $f([\alpha, \beta]) = [a, b]$. A τ designamos por *parâmetro da curva* γ . Assim, f' tem sinal constante em $[\alpha, \beta]$. Dizemos então, que γ tem *orientação positiva* e denotamos a curva por γ_+ , se $f'(\tau) > 0$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, e que γ tem *orientação negativa* e denotamos a curva por γ_- , se $f'(\tau) < 0$, $\tau \in [\alpha, \beta]$.

Dizemos que s é o *parâmetro natural*, da curva γ definida por $x = X(t)$, se

$$s(t) = \int_a^t \|X'(\tau)\| \, d\tau, \text{ e } \|X'(\tau)\| \neq 0, \tau \in [a, b].$$

Note-se que $s(b) = \ell(\gamma)$, que passaremos a denotar por ℓ .

Representando γ em termos do parâmetro natural s , temos $x = X(t)$ e $x = \psi \circ s(t)$. Assim, o vector tangente a γ em cada um dos seus pontos vem dado por $X'(t) = \psi'(s(t))s'(t)$, donde se concluí que $\|X'(t)\| = \|\psi'(s(t))\| \left| \frac{ds}{dt} \right|$. Por definição de parâmetro natural $\left| \frac{ds}{dt} \right| = \|X'(t)\|$, e portanto $\|\psi'(s)\| = 1$. Temos assim que o parâmetro natural

de uma curva, nos dá um processo simples de cálculo de um vector unitário, tangente a essa curva em cada um dos seus pontos.

Problema 9.1. *Determinar o ângulo que o vector unitário, tangente à curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ definida por*

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

faz com o plano OZ , no ponto $(1, 1, 1)$.

Resolução. O vector procurado é da forma

$$\vec{u} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) / \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}$$

que para $t = 1$ nos dá $\vec{u} = (1, 2, 3)/\sqrt{14}$. A sua projecção sobre OZ é o vector $\vec{u}_z = (1, 2, 0)/\sqrt{14}$, pelo que o ângulo pedido é dado por $\arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}_z}{\|\vec{u}_z\|}\right) = \arccos \sqrt{5/14}$. *c.q.d.*

Problema 9.2. *Calcule o comprimento da curva γ definida por*

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad t \in [0, 2\pi],$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

Resolução. Aplicando a definição de comprimento de uma curva diferenciável temos

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt$$

e portanto $\ell(\gamma) = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$. *c.q.d.*

Definição 9.3. Sejam, s o parâmetro natural da curva $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, definida por $x = X(s)$, $s \in [0, \ell]$ e f uma função real contínua definida em $\mathbb{R}^n$. Ao integral

$$I = \int_0^\ell f \circ X(s) ds = \int_0^\ell f(X_1(s), \dots, X_n(s)) ds$$

designamos por *integral curvilíneo de uma função real f* ao longo da curva γ , e denotamo-lo por $\int_\gamma f ds$.

Observação . Tomando para γ outra parametrização, $x = X(t)$, $t \in [a, b]$, temos que I toma a forma

$$\int_a^b f \circ X(t) \|X'(t)\| dt,$$

donde se conclui que o integral curvilíneo de funções reais é independente da orientação da curva γ .

Definição 9.4. Seja γ uma curva de densidade por unidade de comprimento, ρ . Definimos *massa de γ* e denotamo-la por M , como $M = \int_0^\ell \rho(s) ds$.

9.2. Integrais curvilíneos de funções vectoriais.

Definição 9.5. Sejam, s o parâmetro natural da curva $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, definida por $x = X(s)$, $s \in [0, \ell]$ e F uma função vectorial contínua definida em $\mathbb{R}^n$ por

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)).$$

Ao integral

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\ell F \circ X(s) |X'(s)| \, ds \\ &= \int_0^\ell (F_1(X_1(s), \dots, X_n(s)), \dots, F_n(X_1(s), \dots, X_n(s))) |X'(s)| \, ds \end{aligned}$$

designamos por *integral curvilíneo de uma função vectorial F* ao longo da curva γ , e denotamo-lo por

$$\int_\gamma F_1 \, dx_1 + \dots + F_n \, dx_n,$$

pois $X'_j(s) \, ds = dx_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Observação . Tomando para γ outra parametrização, $x = X(t)$, $t \in [a, b]$, temos que I toma a forma

$$I = \int_a^b (F_1 X'_1(t) + \dots + F_n X'_n(t)) \, dt.$$

Vemos assim, que

$$\int_{\gamma_+} F_1 \, dx_1 + \dots + F_n \, dx_n = - \int_{\gamma_-} F_1 \, dx_1 + \dots + F_n \, dx_n.$$

Definição 9.6. Dizemos que a curva γ , definida por $x = X(t)$, $t \in [a, b]$ é *fechada*, se $X(a) = X(b)$. Neste caso ao integral curvilíneo de uma função vectorial F , designamos por *circulação de F ao longo de γ* .

Observação . No caso em que a função vectorial F de expressão analítica

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

se pode representar como o gradiente de alguma função real, i.e. $F = \text{grad } f(x)$, então

$$I = \int_\gamma F_1 \, dx_1 + \dots + F_n \, dx_n = \int_0^\ell \frac{df(X(s))}{ds} \, ds,$$

e portanto $I = f \circ X(\ell) - f \circ X(0)$.

9.3. Aplicações.

Problema 9.3. *Suponhamos que um sólido se desloca ao longo de uma curva γ sob a acção de uma força*

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

Calcule o trabalho da força F .

Demonstração. Exercício.

c.q.d.

Problema 9.4. Considere a curva γ definida pelas equações $x + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- (a) Identifique a curva γ .
- (b) Calcule, usando cálculo integral, o comprimento da curva a partir do integral de comprimento de arco.
- (c) Calcule $I = \int_{\gamma} z \, dx + x \, dy + y^4 \, dz$.

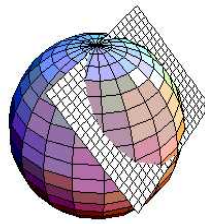


FIGURA 6. Superfície do problema 9.4

Resolução.

(a) A curva γ é a circunferência intersecção, do plano perpendicular ao vector $(1, 0, 1)$ passando pelo ponto de coordenadas $(1, 0, 0)$, com a esfera centrada em $(0, 0, 0)$ de raio 1 (cf. figura 6).

(b) O comprimento pedido é dado por $\ell(\gamma) = \int_{\gamma} ds$ onde ds designa o *elemento de comprimento de arco*, i.e. $\|\vec{T}\| \, dt$ onde $\vec{T}$ é o vector tangente a γ em cada um dos seus pontos e t é o parâmetro natural da curva γ .

As equações cartesianas de γ são dadas por

$$z = 1 - x, \quad \frac{(x - 1/2)^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1,$$

pelo admite a seguinte parametrização

$$x = \frac{1}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \quad z = \frac{1}{2}(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Assim, $\vec{T} = (-\sin t/2, \cos t/\sqrt{2}, \sin t/2)$, e portanto

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1/\sqrt{2} \, dt = \sqrt{2}\pi.$$

(c) Aplicando a definição de integral temos

$$I = \int_0^{2\pi} \left[(1 - \cos t)/2(-\sin t/2) + (1 + \cos t)/2(\cos t/\sqrt{2}) + (\sin t/\sqrt{2})^4(\sin t/2) \right] dt,$$

i.e., $I = \sqrt{2}\pi/4$.

c.q.d.

10. INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

10.1. Integral de superfície de funções reais.

Definição 10.1. Uma *superfície diferenciável*, T , é dita *orientável*, se em cada um dos seus pontos $\mathbf{x}$, podemos determinar um vector normal unitário $\vec{n}$, de forma que a aplicação de T em $\mathbb{R}^n$ definida por $\vec{n} = \vec{n}(\mathbf{x})$ seja contínua em T .

Dizemos que a *superfície diferenciável* T tem *orientação positiva* se $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 | \vec{n} > 0$ em cada $\mathbf{x} \in T$, onde $\vec{t}_1, \vec{t}_2$ são os vectores directores do plano tangente a T em $\mathbf{x} \in T$.

Da mesma forma dizemos que a *superfície diferenciável*, T , tem *orientação negativa* se $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 | \vec{n} < 0$ em cada $\mathbf{x} \in T$, onde $\vec{t}_1, \vec{t}_2$ são os vectores directores do plano tangente a T em $\mathbf{x} \in T$.

Vimos já que um vector normal unitário $\vec{n}$ a uma superfície diferenciável T definida em coordenadas cartesianas por $f(\mathbf{x}) = 0$, onde f é uma função real definida em $\mathbb{R}^n$, vem dado por

$$\vec{n}(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}) / \|\text{grad } f(\mathbf{x})\|, \quad \mathbf{x} \in T.$$

Além disso, se $T \subset \mathbb{R}^3$ estiver definida em coordenadas paramétricas por

$$(11) \quad x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

onde D é um domínio, então um vector normal unitário $\vec{n}$ em cada ponto $(x, y, z) \in T$, vem dado por

$$\left(\left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| \right) / \|\cdot\|,$$

onde $\|\cdot\| = \sqrt{\left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right|^2}.$

Definição 10.2. Seja T uma superfície diferenciável definida parametricamente por (11). Ao integral

$$\sigma(T) = \iint_D \sqrt{\left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right|^2} \, du \, dv,$$

designamos por *área da superfície diferenciável* T , e denotamo-lo por $\sigma(T) = \iint_T dS$, onde dS representa o *elemento de área de superfície*.

Considere-se a função real, g , diferenciável em $\mathbb{R}^3$, ao integral

$$\iint_T g(x, y, z) \, dS = \iint_D g(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \|\cdot\| \, du \, dv,$$

onde $\|\cdot\| = \sqrt{\left|\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)}\right|^2}$, designamos por *integral de superfície da função real g sobre T* .

Observação . Este integral não depende da orientação da superfície.

10.2. Integral de superfície de funções vectoriais.

Definição 10.3. Sejam T uma superfície diferenciável definida parametricamente por (11) e F uma função vectorial contínua definida em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Ao integral

$$\iint_T F \, dS = \iint_T F |\vec{n}| \, dS$$

designamos por *integral de superfície da função vectorial F sobre T* , onde a curva $\text{fr } T$ está considerada com a orientação positiva.

10.3. Aplicações.

Problema 10.1. A área de superfície do triângulo de vértices $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ e $C = (0, 0, c)$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ é $\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}/2$.

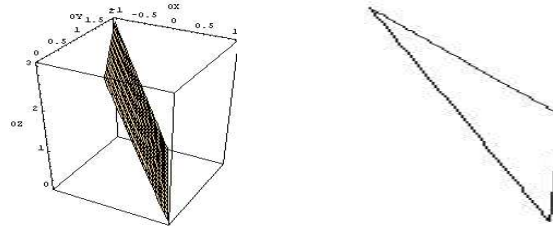


FIGURA 7. Triângulo sobre o Paralelogramo

Resolução.

Primeiro Método: As equações paramétricas do plano onde o triângulo se encontra, i.e. o plano que passa pelo ponto $(a, 0, 0)$ e tem a direcção dos vectores $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$ (cf. figura 7), são dadas por

$$x = a - sa - ta, \quad y = sb, \quad z = tc, \quad (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Assim, um vector perpendicular ao plano vem dado por $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bc, ac, ab)$.

Temos então que área vem dada pelo integral

$$\frac{1}{2} \int_0^1 ds \int_0^1 \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2} dt,$$

i.e. a área pedida é $\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}/2$.

Segundo Método: A equação cartesiana do plano onde o triângulo se encontra, é dada por

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Assim, $\vec{n} = (-c/a, -c/b, 1)$, é um vector perpendicular à região, cuja norma é $\|\vec{n}\| = \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}/ab$. Obtemos então a área da superfície dada por meio do integral

$$\int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} \|\vec{n}\| dy,$$

pois o triângulo é descrito em coordenadas cartesianas por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b(1 - x/a), z = c(x/a - y/b)\}. \quad c.q.d.$$

Problema 10.2. Calcule a área de superfície do cilindro de equação $x^2 + y^2 = x$, contido na esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Resolução. Começemos por descrever a esfera dada em coordenadas esféricas, i.e.

$$x = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \phi,$$

com $0 \leq \rho \leq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$. Além disso, a equação da superfície cilíndrica neste sistema de coordenadas vem dada por $\rho \sin \phi = \cos \theta$. Assim, a superfície procurada vem dada por

$$x = \cos^2 \theta, \quad y = \cos \theta \sin \theta, \quad z = \cos \theta \cotan \phi,$$

com θ, ϕ sujeitas à condição $0 \leq \cos \theta / \sin \phi \leq 1$ e $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, i.e. para $0 \leq \phi \leq \pi/2$

$$\pi/2 - \phi \leq \theta \leq \pi/2, \quad \text{ou} \quad, \quad 3\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2 + \phi$$

e para $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$

$$-\pi/2 + \phi \leq \theta \leq \pi/2, \quad \text{ou} \quad, \quad 3\pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/2 - \phi.$$

Agora, como $\|\vec{n}\| = |\cos \theta| / \sin^2 \phi$ temos que a área de superfície vem dada por

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} \left(\int_{\pi/2-\phi}^{\pi/2} + \int_{3\pi/2}^{3\pi/2+\phi} \cos \theta d\theta \right) + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} \left(\int_{-\pi/2+\phi}^{\pi/2} + \int_{3\pi/2}^{5\pi/2-\phi} \cos \theta d\theta \right)$$

que é igual a 4. c.q.d.

Problema 10.3. A área da superfície terrestre de raio r , T , compreendida entre os meridianos de longitude θ_1, θ_2 e os paralelos de latitude ϕ_1, ϕ_2 é dada por

$$r^2(\theta_2 - \theta_1)(\sin \phi_2 - \sin \phi_1).$$

Resolução. Começemos por descrever a superfície indicada no enunciado (cf. figura 8)

$$x = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \phi,$$

com $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ e $\phi \in [\pi/2 - \phi_2, \pi/2 - \phi_1]$.

Sabemos também que o vector normal exterior vem dado por

$$\vec{n} = r^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

cujas norma é $\|\vec{n}\| = r^2 \sin \phi$.

Aplicando a definição de área de superfície temos

$$\text{Área}(T) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\pi/2-\phi_2}^{\pi/2-\phi_1} r^2 \sin \phi d\phi, \text{ i.e.}$$

$$\text{Área}(T) = r^2(\theta_2 - \theta_1)(\sin \phi_2 - \sin \phi_1). \quad c.q.d.$$

Problema 10.4. Calcule $I = \iint_S F |\vec{n}| dS$ onde S é a superfície definida parametricamente por:

$$x = u + v, \quad y = uv, \quad z = u^2 - v^2, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

$$\text{e } F(x, y, z) = (z, x, y).$$

Resolução. Antes de mais representemos a superfície dada (cf. figura 9). Assim, vamos determinar um vector normal em cada um dos pontos da superfície dada

$$\vec{n} = (-2(u^2 + v^2), 2(u + v), u - v).$$

Por definição I vem dado por

$$I = \int_0^1 du \int_0^1 (-2(u^4 - v^4) + 2(u + v)^2 + uv(u - v)) dv$$

cujos valor é $I = 7/3$. c.q.d.

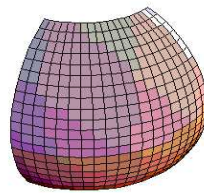


FIGURA 8. Superfície terrestre

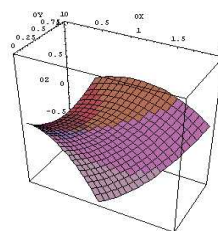


FIGURA 9. Superfície do problema 10.4

11. TEOREMA DE GAUSS-OSTROGRADSKY

Teorema (de Gauss-Ostrogradsky ou da Divergência). *Seja F uma função vectorial de classe C^1 sobre um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$, de expressão analítica*

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Seja G um conexo e fechado de D cuja fronteira, $\text{fr } G = T \subset D$, é uma superfície de classe C^1 . Então,

$$\iiint_G \text{div } F(x, y, z) \, dV = \iint_T F(x, y, z) \, dS,$$

onde dV e dS representam respectivamente, o elemento de volume e de área de superfície.

Problema 11.1. *Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$.*

- (a) *Represente geometricamente a região M .*
- (b) *Justifique que pode tomar (θ, ϕ, ρ) como um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$, onde*

$$x = a\rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = c\rho \cos \phi.$$
- (c) *Descreva o interior geométrico da região M neste novo sistema de coordenadas.*
- (d) *Calcule o volume da região descrita na alínea anterior.*
- (e) *Indique um vector normal unitário, $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, à região M em cada um dos seus pontos.*
- (f) *Calcule o integral de superfície*

$$I = \iint_M (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, dS$$

onde $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ é o vector normal unitário à região M .

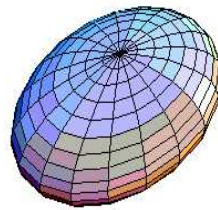


FIGURA 10. Elipsoide

Resolução.

- (a) Ver figura 10.
- (b) As funções de expressão analítica

$$X(\theta, \phi, \rho) = a\rho \sin \phi \cos \theta, \quad Y(\theta, \phi, \rho) = b\rho \sin \phi \sin \theta, \quad Z(\theta, \phi, \rho) = c\rho \cos \phi$$

são funcionalmente independentes em $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \infty[$, e definem uma bijecção entre D e $\mathbb{R}^3$.

(c) $M = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 1]$.

(d) Sabemos que o volume de M vem dado por

$$\text{Volume}(\text{int } M) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^1 \left| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\theta, \phi, \rho)} \right| d\rho,$$

mas $\left| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\theta, \phi, \rho)} \right| = abc\rho^2 \sin \phi$, pelo que o volume é igual a $4abc\pi/3$.

(e) $\vec{n} = \rho^2 \sin \phi (bc \sin \phi \cos \theta, ac \sin \phi \sin \theta, ab \cos \phi)$.

(f) Aplicando o Teorema da Divergência obtemos que

$$I = 3 \text{Volume}(\text{int } M) = 4abc\pi. \quad c.q.d.$$

Problema 11.2. Sendo $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 - rx \leq 0\}$, mostre que

$$\text{Volume}(T) = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS,$$

onde S é a superfície que limita T , orientada com a normal exterior $\vec{n}$.

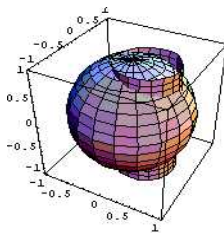


FIGURA 11. Intersecção entre cilindro e esfera

Resolução. Como se pode ver na figura 11 a região T é um sólido fechado e limitado de $\mathbb{R}^3$. Podemos então aplicar o Teorema da Divergência,

$$\iint_S (x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\text{int } S} \text{div}(x, y, z) \, dV = 3 \iiint_T dV,$$

pelo que se tem o resultado enunciado. c.q.d.

12. TEOREMA DE RIEMANN-GREEN

Teorema (Teorema de Riemann-Green). *Seja F uma função vectorial de classe C^1 sobre um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, de expressão analítica $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Seja A_1 um conexo e fechado de D cuja fronteira $\text{fr } A_1 = \gamma \subset D$ é uma curva de classe C^1 fechada. Então,*

$$\iint_{A_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_\gamma F(x, y) \, ds,$$

onde dA e ds representam respectivamente, o elemento de área e de comprimento de arco.

Demonstração. Consideremos que no teorema da divergência, F não depende da variável z , $R \equiv 0$ e que G é um cilindro de base A_1 e de altura h . Considere-se ainda que γ admite a parametrização

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

que é percorrida no sentido directo. Assim, por um lado

$$\iiint_G \operatorname{div} F \, dV = \int_0^h dz \iint_{A_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA,$$

e por outro

$$\iint_T F \, dS = \int_0^h dz \int_{t_0}^{t_1} (P \cos(\vec{n}, OX) + Q \cos(\vec{n}, OY)) dt$$

pois nas bases do cilindro G o integral é nulo ($F|_{\vec{n}} = 0$, pois $\vec{n} = (0, 0, 1)$). Pode ainda ver-se que

$$\cos(\vec{n}, OX) = \frac{dY}{dt}, \quad \cos(\vec{n}, OY) = -\frac{dX}{dt}$$

Então do teorema da divergência temos que

$$\int_{A_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = \int_{t_0}^{t_1} P dy + Q dx$$

e tomando Q em lugar de $-Q$ nesta última fórmula temos o resultado procurado. *c.q.d.*

12.1. Aplicações.

Problema 12.1. *Seja M um conjunto conexo cuja fronteira é uma curva diferenciável, fechada e simples, γ . Então:*

(a) *Se u, v são funções de classe C^1 , tem-se*

$$\int_{\gamma} uv(dx + dy) = \iint_M \left\{ v \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} dx dy.$$

(b) *Se u, v são funções de classe C^2 , então:*

$$\int_{\gamma} \left\{ \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right\} = \iint_M (u \Delta v - v \Delta u) dx dy,$$

$$\text{onde } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

(c) *Se u é tal que $\Delta u = 0$, então $\int_{\gamma} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right\} = 0$.*

Resolução.

(a) e (b) Aplicando o teorema de Riemann-Green às funções de expressão analítica $F_a(x, y) = (uv, uv)$ e

$$F_b(x, y) = \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right), \text{ onde } u \text{ e } v \text{ são funções reais nas variáveis}$$

reais x, y , respectivamente obtemos o resultado enunciado.

(c) Tomando $v \equiv -1$ na igualdade da alínea (b) obtemos

$$\int_{\gamma} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right\} = \iint_M \Delta u dx dy.$$

Agora aplicando a hipótese temos o pretendido.

c.q.d.

13. TEOREMA DE STOKES

Teorema (de Stokes). *Seja F uma função vectorial de classe C^1 sobre um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$. Seja γ uma curva fechada e de classe C^1 em D que é a fronteira de alguma superfície orientada $T \subset D$, i.e. $\text{fr } T = \gamma$. Então,*

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) ds = \int_T \text{rot } F(x, y, z) dS,$$

onde ds e dS representam respectivamente, o elemento de comprimento de arco e de área de superfície.

Observação . O teorema que acabámos de enunciar diz-nos que o fluxo do vector $\text{rot } F$ através da superfície orientada, T , é igual à circulação do vector F sobre o bordo, γ que delimita T .

13.1. Aplicações.

Problema 13.1. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$F(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} + e^{-z} \vec{k}.$$

Calcule o $I = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + e^{-z} dz$, quando:

- (a) $C = \{(x, y, a) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ com $a \in \mathbb{R}$.
- (b) C for uma qualquer curva fechada no espaço que não contiver nenhum ponto do eixo OZ no seu interior geométrico.
- (c) C é uma qualquer curva fechada, simples, parcialmente suave no plano $z = a$, que contém o ponto $(0, 0, a)$ no seu interior geométrico.

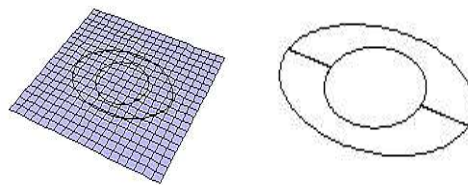


FIGURA 12. Curvas fechadas no plano $z = 3$

Resolução.

(a) Começamos por descrever a curva C em coordenadas paramétricas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = a, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Assim um vector tangente a C em cada um dos seus pontos, $\vec{T} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$, pelo que

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \sin \theta}{r^2} (-r \sin \theta) + \frac{r \cos \theta}{r^2} (r \cos \theta) + e^a(0) \right) dt.$$

Vemos então que $I = 2\pi$.

Note-se que não podemos aplicar o Teorema de Stokes para resolver este exercício pois a função F não é de classe C^1 no interior geométrico de C .

(b) Neste caso podemos aplicar o teorema de Stokes pois F é de classe C^1 no interior geométrico de C . Agora, como o rotacional de F , $\text{rot } F = (0, 0, 0)$, concluímos que $I = 0$.

Note-se que como o rotacional é o vector nulo existe uma função real de variáveis reais (x, y, z) , g , tal que $F = \text{grad } g(x, y, z)$, e portanto o integral é independente do caminho considerado, numa região que não contenha pontos da forma $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Desta forma concluímos também que $I = 0$.

(c) $I = 2\pi$. De facto, considere-se a circunferência C_1 de raio infinitamente pequeno centrada em $(0, 0, a)$ que com C admite uma representação do tipo da figura 12. Construimos assim a curva $\gamma = C_1 \cup C$ que admite a decomposição que se mostra na figura 12, i.e. $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$. Agora,

$$J = \int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + e^{-z} dz.$$

Além disso, como no interior geométrico de cada uma das curvas γ_+ e γ_- , F é de classe C^1 , podemos aplicar o teorema de Riemann-Green a cada um dos integrais anteriores em que se decompõe J , concluindo desta forma que $J = 0$.

Eliminando os caminhos que são percorridos nos dois sentidos, vemos que

$$J = \int_{C \cup \overleftarrow{C_1}} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + e^{-z} dz,$$

e portanto, aplicando as propriedades do integral curvilíneo

$$I = \int_{C_1} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + e^{-z} dz$$

e pela alínea (a) temos o resultado.

c.q.d.

Problema 13.2. Sendo γ a curva definida pelas equações

$$x = \cos t, \quad y = \cos 2t, \quad z = \cos 3t, \quad t \in [0, \pi],$$

então $I = \int_{\gamma} (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz = 8/3$.

Resolução.

Primeiro Método: Tendo em atenção que o vector tangente à curva dada é

$$-(\sin t, 2\sin(2t), 3\sin(3t)),$$

e que a curva dada não é fechada (cf. figura 13) temos que

$$I = \int_0^\pi -[(\cos(2t) + \cos(3t)) \sin t + (\cos t + \cos(3t)) 2 \sin(2t) + (\cos t + \cos(2t)) 3 \sin(3t)] dt,$$

e portanto $I = -4$.

Segundo Método: O campo de vectores de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ de expressão analítica $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ é conservativo, pois

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}.$$

A curva diferenciável, γ , une os pontos $P_0 = (1, 1, 1)$ e $P_1 = (-1, 1, -1)$. Considere-se a curva diferenciável fechada $\Gamma = \gamma \cup \overrightarrow{P_1 P_0}$, onde o segmento de recta orientado $\overrightarrow{P_1 P_0}$ está definido por

$$x = 2t - 1, \quad y = 1, \quad z = 2t - 1, \quad t \in [0, 1].$$

Aplicando o teorema de Stokes sobre a curva Γ , temos que

$$\int_\Gamma F \, ds = \iint_{\text{int}(\Gamma)} \text{rot } F \, dS = 0.$$

Assim, $I = - \int_{\overrightarrow{P_1 P_0}} F \, ds = - \int_0^1 [(1 + 2t - 1)2 + (2t - 1 + 2t - 1)0 + (2t - 1 + 1)2] dt$, e portanto $I = -4$.

Terceiro Método: Vimos já que o campo de vectores F é conservativo. Determinemos então uma função real, f , definida em $\mathbb{R}^3$ tal que $F = \text{grad } f$, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x + y.$$

Da primeira condição obtemos por primitivação relativamente à variável x que existe uma função real de classe C^1 , h , tal que $f(x, y, z) = (y + z)x + h(y, z)$. Derivando em ordem à variável y e comparando com a segunda condição inicial temos, que existe uma função real de classe C^1 , g , tal que $h(y, z) = yz + g(z)$. Assim, $f(x, y, z) = xy + xz + yz + g(z)$, para alguma função real de variável real g de classe C^1 . Derivando esta função em

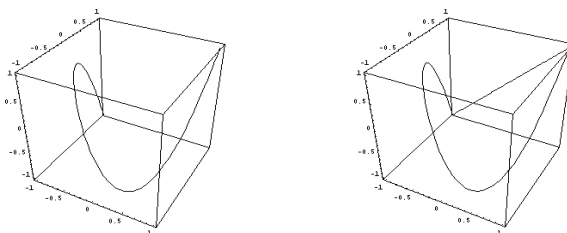


FIGURA 13. Curvas do problema 13.2

ordem à variável z e comparando com a terceira condição inicial temos que $g \equiv c$ com c constante real arbitrária. Pelo que um exemplo de função f procurada tem expressão analítica $f(x, y, z) = xy + xz + yz$.

Assim, $I = f(-1, 1, -1) - f(1, 1, 1) = -1 - 3 = -4$.

c.q.d.

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 4\}$. Verifique se

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{4/\cos(\theta)} \rho^3 \sin \phi d\rho.$$

2. Seja S a superfície de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$.

a) Identifique geometricamente a superfície S .

b) Justifique que pode tomar (θ, ϕ, ρ) como um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$, onde

$$x = 2\rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = 3\rho \cos \phi.$$

c) Mostre que a equação cartesiana do plano tangente a S em $(a, b, c) \in S \cap (\mathbb{R}^+)^3$ é dada por

$$\frac{ax}{4} + by + \frac{cz}{9} = 1.$$

d) Mostre utilizando cálculo integral que a área de superfície do triângulo de vértices $(A, 0, 0)$, $(0, B, 0)$ e $(0, 0, C)$ com A, B, C números reais positivos, é dada por

$$\sqrt{A^2 B^2 + A^2 C^2 + B^2 C^2} / 2.$$

Utilize este resultado para calcular a área de superfície de

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, \frac{ax}{4} + by + \frac{cz}{9} = 1\}.$$

e) Indique o integral triplo iterado que lhe permite calcular o volume, V , do sólido

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0, \frac{ax}{4} + by + \frac{cz}{9} < 1\}.$$

Note que V é função de (a, b, c) .

f) Determine o mínimo de V sobre S , onde V é o volume de R .

g) Relacione o volume do sólido R com o integral

$$\iint_Q (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

onde $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ é o vector normal unitário exterior a R .

3. Calcule $\int_{\Gamma} (x + y)dx + (x - y)dy$ ao longo dos seguintes caminhos Γ que unem os pontos $O = (0, 0)$ e $M = (\pi, \pi)$:

a) Segmento de recta $\overline{OM}$.

b) Curva $y = x + \sin x$.

Comente o resultado obtido.

4. Calcule $\int_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ onde S é a superfície definida parametricamente por:

$$x = u + v, \quad y = uv, \quad z = u^2 - v^2, \quad (u, v) \in [0, 1]^2,$$

$$\text{e } \vec{F}(x, y, z) = (z, x, y).$$

5. Sendo $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 - rx \leq 0\}$, mostre que

$$V(T) = \frac{1}{3} \int_S (x, y, z) \cdot \hat{n} \, dS,$$

onde S é a superfície que limita T , orientada com a normal exterior $\hat{n}$.

6. Considere o sólido definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2, x^2 + y^2 + z^2 < 2x, y < 0\}.$$

a) Represente-o graficamente.

b) Descreva S em coordenadas cilíndricas.

c) Descreva S em coordenadas esféricas.

d) Calcule $\iiint_S dV$ e interprete o resultado obtido.

e) Seja F a união das superfícies não planas que limitam S , orientada com a normal exterior $\vec{n}$. Mostre que $V(S) = \frac{1}{3} \int_F (x, y, z) |\vec{n}| \, ds$.

7. Seja C a curva de intersecção das superfícies de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = x, \quad \text{em } y \geq 0.$$

a) Determine um vector tangente à curva C em cada um dos seus pontos.

b) Indique o integral que lhe permite calcular o comprimento da curva C .

Indicação: Descreva a curva em coordenadas cilíndricas.

c) Verifique se o campo de vectores $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (2x^3 + x - y^2 - 2xy, 2y^3 + y - x^2 - 2xy, -1)$ é conservativo.

d) Calcule $\int_C (2x^3 + x - y^2 - 2xy) \, dx + (2y^3 + y - x^2 - 2xy) \, dy - dz$.

8. Considere o integral $\int_0^\infty e^{-t} \cos(xt) \, dt$.

a) Verifique que é uniformemente convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$.

b) Calcule $\int_0^\infty dt \int_0^1 e^{-t} \cos(xt) \, dx$.

9. Considere o integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx$.

a) Verifique que o integral dado é uniformemente convergente para todo o $y \in \mathbb{R}^+$.

Indicação: Justifique que pode usar como função de comparação e^{-x} .

b) Calcule $\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} \, dx$.

Indicação: Justifique que pode usar coordenadas polares.

10. Considere a curva C de equações cartesianas $z = -x^2 - y^2 + 2$, $2y + z = 2$, e o campo de vectores, F , definido em $\mathbb{R}^3$ por $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.
- Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento de C .
 - Verifique que o campo de vectores F é conservativo e determine uma função real, f , definida em $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{grad } f = F$.
 - Mostre que $\int_C (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz = 0$.
 - Mostre que $\iint_T F(x, y, z) \cdot \vec{n} dS = 0$, onde $T = T_1 \cup T_2$ com
 $T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x^2 - y^2 + 2, 2y + z \geq 2\}$, $T_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq -x^2 - y^2 + 2, 2y + z = 2\}$,
e $\vec{n}$ é o vector normal unitário, exterior a T .
 - Estabeleça o integral duplo que lhe permite calcular
 $\iint_{T_2} F(x, y, z) \cdot \vec{n} dS$.
11. Considere o campo de vectores $F: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $C^1(D)$.
- Dê uma condição necessária e suficiente para que F seja conservativo.
 - Diga em que condições se tem $\int_\gamma F \cdot \vec{t} ds = \int_\Gamma \text{rot } F \cdot \vec{n} dS$.
 - Defina curva integral associada ao campo de vectores F .
12. Seja γ a curva de equação $x^2 + y^2 = 3z^2$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.
- Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento de γ .
 - Calcule $\int_\gamma F \cdot \vec{t} ds$, onde F é o campo de vectores definido em $\mathbb{R}^3$ por
 $F(x, y, z) = (2xyze^{x^2}, ze^{x^2} + 2ye^{y^2}, ye^{x^2})$.
 - Descreva em coordenadas cilíndricas e esféricas a região
 $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, z > 1/2\}$.
 - Estabeleça o integral que lhe permite calcular o volume de T .
 - Calcule o integral $\int_{S_1 \cup S_2} G \cdot \vec{n} dS$, onde G é o campo de vectores definido por
 $G(x, y, z) = (xy^2, -y^3, z(5 + 2y^2))$, S_1 é a superfície de equação
 $x = r \cos t, y = r \sin t, z = r/\sqrt{3}, (t, r) \in [0, 2\pi[\times [0, \sqrt{3}/2[$,
e S_2 é o interior geométrico da curva γ .
13. Considere o campo de vectores $\mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de expressão analítica $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$.
- Verifique se o campo de vectores $\mathbf{F}$ é conservativo.

- b) Aplicando o teorema de Stokes, calcule o integral $\int_C \mathbf{F} \mid \vec{t} \, ds$, onde C é a curva de equação $x^2 + 2y^2 + 2x + 4y = 9$, $y = z$.
- c) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o comprimento de C .
- d) Defina curva integral associada ao campo de vectores $\mathbf{F}$.

14. Seja T a região de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, \quad x^2 + y^2 < z^2, \quad z < 0\}.$$

- a) Descreva em coordenadas esféricas a região T .
- b) Estabeleça o integral que lhe permite calcular o volume de T .
- c) Mostre que $\int_{\partial T} (y, z, x) \mid \vec{n} \, dS = 0$, enunciando os resultados que aplicar e identificando a fronteira de T , ∂T .

15. Seja $\mathbf{F}$ um campo de vectores de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$.

- a) Mostre que $\text{div}(\text{rot } \mathbf{F}) = 0$.
- b) Calcule o seguinte integral, por definição e aplicando o teorema de Stokes,

$$\int_{\gamma} \mathbf{G} \mid \vec{t} \, dt, \quad \text{onde } \gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 1, \quad z = 0\},$$

e $\mathbf{G}$ é o campo de vectores de expressão analítica $\mathbf{G}(x, y, z) = (-y, x, z)$.

- c) Mostre, enunciando os resultados que aplicar, que

$$\int_L \text{rot } \mathbf{F} \mid \vec{n} \, dS = 0, \quad \text{onde}$$

$$L = \left\{ (\sin s \cos t, \sin s \sin t, \cos s), \quad s \in [0, \pi], \quad t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

ÍNDICE

- $\mathbb{R}^n$ -metria, 1
- área
 - rectângulo, 2
- bola aberta, 2
- campo
 - de vectores, 18
- conjunto
 - aberto, 2
 - compacto, 5
 - cubo, 35
 - elementares, 34
 - mensurável à Jourdan, 35
 - paralelepípedo rectângular, 34
- coordenas
 - cilíndricas, 39
 - esféricas, 40
 - polares, 39
- curva
 - contínua, 4
 - de nível, 3
 - em $\mathbb{R}^2$, 12
 - integral, 18
 - simples, 16
- curva contínua, 40
 - rectificável, 41
 - comprimento, 41
 - fechada, 43
 - orientação negativa, 41
 - orientação positiva, 41
 - parâmetro, 41
 - parâmetro natural, 41
 - ponto
 - múltiplo, 41
 - representações, 41
- derivada
 - parcial, 5
 - representação geometrica, 6
- diâmetro
 - conjunto, 36
 - partição, 41
- diferenciabilidade
 - condição necessária, 7
 - condição suficiente, 9
 - função composta, 10
- diferencial
 - função vectorial, 9
 - função real, 7
- diferenciável
 - função real, 7
 - função vectorial, 8
- distância, 1
- equação
 - derivadas parciais
 - lineares, 20
 - primeira ordem, 21
 - quasi-linear, 22
- espaço
 - afim, 1
 - euclideano, 1
 - vectorial, 1
- funções
 - analíticas, 11
 - bijectivas, 14
 - contínuas, 4
 - definidas implicitamente, 12
 - funcionalmente dependentes, 15
 - funcionalmente independentes, 15
 - uniformemente contínuas, 5
 - vectoriais, 3
- função
 - integrável
 - à Riemann, 36
 - vectorial, 18
- função vectorial
 - circulação, 43
- geometria, 1
- integral
 - curvilíneo
 - função real, 42
 - função vectorial, 43
 - de superfície
 - função real, 46
 - função vectorial, 46
- duplo, 37
- iterado, 37
- múltiplo, 36
- paramétrico, 31
 - convergência uniforme, 33
 - impróprio, 33
- limite

- direccional, 4
- função real, 3
- função vectorial, 3
- linha
 - de força, 18
- matriz
 - característica, 15
 - menores, 15
- medida
 - de um conjunto, 38
 - vazio, 34
 - elemento
 - comprimento de arco, 44
 - área de superfície, 45
 - exterior, 35
 - interior, 35
 - massa
 - curva contínua, 42
 - sólido, 37
 - paralelepípedo rectângular, 34
 - volume, 36
- método
 - Kowalewsky-Cauchy
 - equação com derivads parciais, 24
 - equação diferencial, 24
- ponto
 - múltiplo, 16
- problema
 - de Cauchy, 24
- região
 - simples
 - horizontalmente, 31
 - verticalmente, 31
- sistema
 - de Charpit-Lagrange, 23
- solução
 - equação
 - derivadas parciais, 21
 - integral, 20
- soma integral, 36
- superfície diferenciável
 - orientação
 - negativa, 45
 - positiva, 45
 - orientável, 45
 - área, 45
- superfície diferenciável, 16
- equação cartesiana, 16
- vector normal, 16
- Taylor
 - polinómio, 12
 - série, 11
- teorema
 - Caso quasi-linear, 22
 - conjuntos mensuráveis
 - estabilidade, 35
 - da divergência, 49
 - da função implícita
 - diferenciabilidade, 13
 - existência, 12
 - da sandwich, 4
 - de Cauchy, 4
 - de Gauss-Ostrogradsky, 49
 - de Riemann-Green, 50
 - de Stokes, 52
 - de Weierstrass, 5
 - função implícita, 13
 - função inversa, 14
 - funcionalmente dependentes
 - condição necessária, 15
 - condição suficiente, 15
 - fundamental
 - conjuntos mensuráveis, 35
 - Geração de soluções integrais, 20
 - incrementos finitos, 6
 - integral paramétrico
 - condição suficiente, 33
 - continuidade, 31
 - diferenciabilidade, 31
 - diferenciabilidade (caso geral), 32
 - integrabilidade, 31
 - resultado de Cauchy, 33
 - limite por curvas, 4
 - mudança de variável
 - integral, 38
 - propriedades
 - da medida, 34
 - do integral, 37