Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra 05/04/06
Frequência I DURAÇÃO: 1H15M
Matemática IV ENG. QUÍMICA E DE MATERIAIS

(3.5) **1.** Considera as funções

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de expressão analítica $g(x,y) = \big(x\,y, y^2 - x^2\big)$, e

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $u\,\dfrac{\partial f}{\partial u} + v\,\dfrac{\partial f}{\partial v} = 2\,f$.

a) Determina o diferencial da função g .

b) Justifica que a função $h = f \circ g$ é diferenciável e calcule o seu diferencial.

c) Mostra que $h = f \circ g$ verifica a equação diferencial em derivadas parciais
$$x\,\frac{\partial h}{\partial x} + y\,\frac{\partial h}{\partial y} = 4\,h\,.$$

(4.0) **2.** Considera as superfícies, S_1 e S_2 , de equação cartesiana
$$S_1 :\ x^2 + 4\,y^2 + 2\,z^2 = 1\,, \qquad S_2 :\ 2\,x + 4\,y + 2\,z = 3\,.$$

a) Identifica S_1 e S_2 e define curva diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

b) Aplicando o teorema das funções definidas implicitamente mostra que, numa vizinhança de $(1/2, 1/4, 1/2)$, $S_1 \cap S_2$, admite uma representação paramétrica
$$r(t) = (t, y(t), z(t))\,, \quad t \in]1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon[\,, \text{ para algum } \epsilon > 0\,.$$

c) Determina um vector tangente à curva de intersecção de S_1 e S_2 no ponto $(1/2, 1/4, 1/2)$.

(2.5) **3.** Considera o integral $I = \displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,.$

a) Inverte a ordem de integração no integral dado.

b) Calcula o valor de I com $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+y^5}}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra 31/05/06
Frequência II DURAÇÃO: 1H15M
Matemática IV ENG. QUÍMICA E DE MATERIAIS

(3.5) **4.** Seja T a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 < 8\,,\ z^2 < x^2+y^2\,,\ z<0\,,\ x>0\,\}.$$

a) Identifica a região T.

b) Calcula, utilizando coordenadas esféricas, o integral $\displaystyle\int_T z \,\mathrm{d}\,V$.

c) Dá uma interpretação física para o integral calculado na alínea anterior.

(6.5) **5.** Considera as superfícies S_1, S_2 definidas por

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 = 1\,\}\,,\quad S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y+z = 1\,\}$$

e o campo de vectores, F, de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ de expressão analítica

$$F(x,y,z) = (-y\,,\ x\,,\ z)\,.$$

a) Determina o rotacional e a divergência de F.

b) Estabelece o integral que te permite calcular o comprimento da curva, γ, intersecção de S_1 com S_2, indicando uma parametrização para γ.

c) Enuncia os teoremas de Stokes e da divergência.

d) Calcula o integral $\displaystyle\int_\gamma F|\vec{t}\,\mathrm{d}\,s$, onde $\gamma = S_1 \cap S_2$, por dois processos distintos.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra 12/06/06

Exame DURAÇÃO: 2H30M

Matemática IV ENG. QUÍMICA E DE MATERIAIS

(4.0) **1.** Considera a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de expressão analítica

$$h(x,y) = \big(x^2 + 2xy\,,\, x + y\big)\,.$$

a) Mostra que h é localmente invertível numa vizinhança de $(1,1)$.

b) Seja f a inversa da restrição de h a uma vizinhança de $(1,1)$. Determina o diferencial de f em $(3,2)$.

c) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de expressão analítica

$$g(u,v) = f(3\,\sin(2u+v)\,,\, 2\,\cos(2u-v))\,,$$

onde f é a função definida na alínea anterior. Determina o diferencial de g em $(\pi/8\,,\,\pi/4)$.

(3.0) **2.** Considera as equações,

$$x^2 + y^2 + 2z = 0\,, \quad e^x + e^{2y} + e^z = 3\,.$$

a) Aplicando o teorema das funções definidas implicitamente mostra que, numa vizinhança de $(0,0,0)$, as equações anteriores definem uma curva de classe C^1.

b) Determina um vector tangente à curva dada no ponto $(0,0,0)$.

(3.0) **3.**

a) Considera a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de expressão analítica

$$H(x,y) = \int_a^{x+y} G(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_a^{xy} G(t)\,\mathrm{d}\,t$$

onde G é uma função real de variável real contínua. Calcula as derivadas parciais de primeira ordem de H.

b) Calcula o valor do integral $\displaystyle\int_M \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\,A$, onde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \pi/2\,,\, x < 0\}.$$

(3.5) **4.** Seja T a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 4\,,\ x > 0\,,\ y > 0\}.$$

a) Identifica a região T.

b) Descreve em coordenadas esféricas e em coordenadas cilíndricas a região T.

c) Calcula o integral $\displaystyle\int_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}\,V$.

(3.5) **5.** Considera o integral $I = \displaystyle\int_\gamma F\,|\,\vec{t}\,\mathrm{d}\,s$, onde γ é o segmento de recta que vai do ponto $(1, 0)$ ao $(0, 1)$, e F é o campo de vectores em $\mathbb{R}^2$, de expressão analítica $F(x, y) = (x^2 - y^2\,,\, -x^2 - y^2)$.

a) Enuncia o teorema de Riemann-Green.

b) Calcula o integral I.

c) Seja α a curva triângular, orientada com o sentido positivo, que une os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Calcula o integral $\displaystyle\int_\alpha F\,|\,\vec{t}\,\mathrm{d}\,s$ por dois processos diferentes.

(3.0) **6.** Considera a superfície S_1 definida por

$$x = \sin u \cos v\,,\quad y = \sin u \sin v\,,\quad z = \cos u\,,\quad (u, v) \in [0\,,\,\pi] \times [0\,,\,2\pi]\,,$$

e o campo de vectores, F, de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ de expressão analítica

$$F(x, y, z) = \operatorname{grad} f(x, y, z)\,,\ \text{e}\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

a) Calcula a área de superfície de $S_1 \cap S_2$ onde $S_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

b) Calcula o integral $\displaystyle\int_\gamma F|\,\vec{t}\,\mathrm{d}\,s$, onde $\gamma = S_1 \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra — 10/07/06

Exame de Recurso — Duração: 2h30m

Matemática IV — Eng. Química e de Materiais

(4.0) **1.** Considera as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de expressão analítica

$$f(x,y) = \big(x^2 + y\,,\, x + e^y\big) \quad \text{e} \quad g(x,y) = \big(y^2\,,\, xy\big)\,.$$

a) Justifica que $h = g \circ f$ é diferenciável e, usando o teorema da derivada da função composta, calcula $Dh(1,0)$.

b) Prova que h é localmente invertível numa vizinhança do ponto $(1,0)$. Sendo h^{-1} a inversa local de h na vizinhaça considerada, calcule $Dh^{-1}(4,2)$.

(3.0) **2.** Considera as superfícies S_1, S_2 definidas respectivamente, por

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \;e\; \quad x^2 - 2y^2 + z^2 = 0\,.$$

a) Identifica S_1 e S_2 e define curva diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

b) Aplicando o teorema das funções definidas implicitamente mostra que, numa vizinhança de $(1,1,1)$, $C = S_1 \cap S_2$, admite uma representação paramétrica de classe C^1

$$r(t) = (x(t), t, z(t))\,, \quad t \in]1-\epsilon, 1+\epsilon[\,, \text{ para algum } \epsilon > 0\,.$$

c) Determina $r'(1)$ e diga o significado geométrico deste vector.

(3.0) **3.** Considera o conjunto $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \sqrt{3}\,x\,,\; 1/2 < x^2 + y^2 < 1\}$ e o integral $I = \displaystyle\int_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$

a) Calcula o integral I usando coordenadas polares.

b) Estabelece o integral I, usando o sistema de coordenadas definido pela aplicação $g : U \to U$, de expressão analítica $g(x,y) = (x^2 + y^2\,,\, y/x)$, onde $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\,,\; y > 0\}$.

Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra 10/07/06
Exame de Recurso (cont.)
Matemática IV ENG. QUÍMICA E DE MATERIAIS

(3.0) **4.** Seja T a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z^2 < 1 \,,\; 0 < z < 2\}.$$

a) Identifica a região T e descreve-a em coordenadas cilíndricas.

b) Calcula o volume da região T.

(3.5) **5.** Considera o campo de vectores em $\mathbb{R}^3$, de expressão analítica

$$F(x, y, z) = (yz \,,\; xz \,,\; xy)\,.$$

a) Verifica se existe uma função real, g, definida em $\mathbb{R}^3$, tal que grad $g = F$.

b) Calcula o integral $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \,|\, \vec{t} \,\mathrm{d}\, s$, onde γ_1 é o segmento de recta que vai do ponto $(0, 0, 1)$ ao $(1, 1, 0)$.

c) Calcula o integral $\displaystyle\int_{\gamma_2} F \,|\, \vec{t} \,\mathrm{d}\, s$, onde γ_2 é a curva de equação vectorial

$$r(t) = (\sin t \,,\; 1 - \cos t \,,\; \cos t) \,,\; t \in [0, \pi/2]\,.$$

Comente o resultado obtido tendo em atenção o teorema de Stokes.

(3.5) **6.** Considera a superfície S_1, orientada com a normal exterior, $\vec{n}$, definida por

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}\,, \quad z > 4$$

e o integral $J = \displaystyle\int_{S_1} F \,|\, \vec{n} \,\mathrm{d}\, S$, onde F é o campo de vectores definido em $\mathbb{R}^3$ por $F(x, y, z) = (\cos y \,,\; x^2 \,,\; z^2 + 1)\,.$

a) Estabelece o integral duplo que te permite calcular J.

b) Calcula, usando o teorema da divergência, o valor de J.
