

Cálculo Integral

ÍNDICE GERAL

1. Integral paramétrico definido	1
1.1. Definição	1
1.2. Propriedades do integral paramétrico	1
1.3. Aplicações	2
2. Integral paramétrico impróprio	3
2.1. Condições suficientes de convergência	3
2.2. Aplicações	3
3. Integrais Múltiplos	4
3.1. Conjuntos mensuráveis à Jourdan	4
3.2. Noção de integral múltiplo à Riemann	5
3.3. Fórmula de mudança de variável. Exemplos	7
4. Integrais curvilíneos	10
4.1. Integrais curvilíneos de funções reais	10
4.2. Integrais curvilíneos de funções vectoriais	12
4.3. Aplicações	13
5. Integrais de superfície	14
5.1. Integral de superfície de funções reais	14
5.2. Integral de superfície de funções vectoriais	15
5.3. Aplicações	15
6. Teoremas fundamentais do cálculo integral	18
6.1. Teorema de Gauss-Ostrogradsky	18
6.2. Teorema de Riemann-Green	19
6.3. Aplicações	20
6.4. Teorema de Stokes	21
6.5. Aplicações	21
ÍNDICE REMISSIVO	24

1. INTEGRAL PARAMÉTRICO DEFINIDO

1.1. **Definição.** Vamos aplicar resultados de cálculo diferencial ao estudo de funções de expressão analítica

$$(1) \quad f(x) = \int_a^b g(x, y) \, dy$$

onde g é uma função real definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. As funções do tipo (1), designamos por *integrais paramétricas*.

Observação . O estudo que aqui vamos realizar é também válido no caso em que g é uma função vectorial.

1.2. **Propriedades do integral paramétrico.** Começamos por enunciar, sem demonstração, alguns resultados fundamentais sobre integrais paramétricas.

Teorema (Continuidade de integrais paramétricos). *Seja g uma função contínua definida em $D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde D é um conjunto compacto. Então f definida por (1) é contínua em D .*

Teorema (Diferenciabilidade de integrais paramétricos). *Seja g uma função de classe C^1 definida em $D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde D é um conjunto compacto. Então f definida por (1) é diferenciável em D e*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x_j} \, dy, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema (Integrabilidade de integrais paramétricos). *Seja g uma função contínua definida em $D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde D é um conjunto compacto. Então é válida a seguinte igualdade*

$$\int_I f(x) \, dx = \int_a^b dy \int_I g(x, y) \, dx,$$

onde $I \subset \mathbb{R}^n$ tem a forma $I = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$.

Observação . Este resultado é válido para regiões $I \subset \mathbb{R}^2$ simultaneamente *vertical e horizontalmente simples*, i.e. I admite as seguintes representações

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x \leq \beta, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

onde ϕ, ψ são funções contínuas em $[\alpha, \beta]$, e

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, h(y) \leq x \leq k(y)\},$$

onde h, k são funções contínuas em $[a, b]$, respectivamente.

1.3. Aplicações.

Problema 1.1 (Limites de integração variáveis). *Seja g uma função de classe C^1 definida em $D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde D é um conjunto compacto, e α, β duas funções reais de classe C^1 em D , verificando $a \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq b$, $x \in D$. Então f definida por*

$$f_1(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, y) \, dy,$$

é diferenciável em D e

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g}{\partial x_j} \, dy + g(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta}{\partial x_j} - g(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Resolução. Podemos escrever a função

$$f_1(x) = \int_a^{\beta(x)} g(x, y) \, dy - \int_a^{\alpha(x)} g(x, y) \, dy$$

pelo que

$$f_1(x) = F \circ \phi(x) - F \circ \psi(x), \quad \text{onde} \quad F(x, t) = \int_a^t g(x, y) \, dy.$$

e ϕ e ψ são funções definidas em D com contradomínio em \mathbb{R}^2 , com expressão analítica $\phi(x) = (x, \beta(x))$ e $\psi(x) = (x, \alpha(x))$. Aplicando o teorema da derivada da função definida por composição obtemos o resultado desejado. *c. q. d.*

Problema 1.2. *Tendo em atenção que $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$, calcule os seguintes integrais*

$$\int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad \int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Resolução. Como a função de expressão analítica $g(x, a) = 1/(x^2 + a^2)$ é de classe $C^1(\mathbb{R}^+)$ podemos aplicar o teorema da diferenciabilidade de integrais paramétricos. Assim,

$$\int_0^a \frac{-2a}{(x^2 + a^2)^2} \, dx + \frac{1}{2a^2} = -\frac{\pi}{a^2},$$

e portanto, $\int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{2 + \pi}{8a^3}$.

Tendo em atenção que g é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+)$ podemos aplicar o mesmo resultado de forma repetida. *c. q. d.*

Problema 1.3. *Calcule os seguintes integrais*

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} \, dy, \quad J = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_{y^2}^1 \sqrt{x} \sin x \, dx.$$

Resolução. Qualquer das funções integrandas não é elementarmente primitivável, pelo que temos de inverter a ordem de integração. Podemos efectuar esta operação pois estamos nas condições do teorema da condição de integrabilidade dos integrais paramétricos. Assim,

$$I = \int_0^1 e^{-y^2} y \, dy = \frac{e-1}{2e}, \quad J = \int_0^\pi x \sin x \, dx = \pi. \quad \text{c. q. d.}$$

2. INTEGRAL PARAMÉTRICO IMPRÓPRIO

2.1. Condições suficientes de convergência.

Definição 2.1. Seja g uma função que tem uma descontinuidade no ponto $b \in \mathbb{R}$. O integral $\int_a^b g(x, y) \, dy$ é dito *uniformemente convergente sobre o conjunto* $A \subset \mathbb{R}^n$, para uma função f , se para todo o $x \in A$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : 0 < b - t < \delta \implies \left| \int_a^t g(x, y) \, dy - f(x) \right| < \epsilon.$$

Teorema (de Cauchy). *Seja g uma função que tem uma descontinuidade no ponto $b \in \mathbb{R}$. Uma condição necessária e suficiente de convergência do integral $\int_a^b g(x, y) \, dy$ sobre um conjunto A é que, para todo o $x \in A$,*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : 0 < b - y_1 < \delta, 0 < b - y_2 < \delta \implies \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x, y) \, dy \right| < \epsilon,$$

se $b \neq +\infty$, e

$$\forall \epsilon > 0 \exists c = c(\epsilon) > 0 : y_1 > c, y_2 > c \implies \left| \int_{y_1}^{y_2} g(x, y) \, dy \right| < \epsilon,$$

se $b = +\infty$.

Teorema (Condição suficiente). *Seja g uma função que tem uma descontinuidade em $(x, b) \in A \times \mathbb{R}$. Uma condição suficiente de convergência do integral $\int_a^b g(x, y) \, dy$ sobre um conjunto A é que, para exista uma função real ϕ com $|g(x, y)| \leq \phi(y)$, para $x \in A$, $y \in [a, b[$ e $\int_a^b \phi(y) \, dy < \infty$.*

Observação . Uma vez demonstrada a convergência uniforme do integral paramétrico impróprio, passam a aplicar-se as propriedades de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade dos integrais paramétricos.

2.2. Aplicações.

Problema 2.1. *Considere o integral $\int_0^\infty e^{-t} \cos(xt) \, dt$.*

(a) *Verifique que é uniformemente convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$.*

(b) *Calcule $\int_0^\infty dt \int_0^1 e^{-t} \cos(xt) \, dx$.*

Resolução.

(a) A convergência do integral é uma consequência imediata da desigualdade

$$|e^{-t} \cos(xt)| \leq e^{-t}, \text{ válida para todo o } x \text{ em } \mathbb{R}^+, \text{ pois } \int_0^1 e^{-t} \, dt \text{ é convergente.}$$

(b) Invertendo a ordem de integração e tendo em atenção que

$$\int e^{-t} \cos(xt) \, dt = \frac{e^{-t}(-\cos(xt) + x \sin(xt))}{1 + x^2},$$

obtemos

$$\int_0^\infty dt \int_0^1 e^{-t} \cos(xt) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx,$$

cujo valor é $\pi/4$.

c. q. d.

3. INTEGRAIS MÚLTIPLOS

3.1. Conjuntos mensuráveis à Jourdan. Para conjuntos em espaços multidimensionais, podemos introduzir noções análogas às de comprimento de um segmento. Surge assim a noção de medida de um conjunto.

Vamos introduzir a noção de medida para conjuntos simples, que designaremos por *paralelepípedos rectangulares multidimensionais*, A , i.e.

$$A = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : a_j \leq x_j \leq a_j + h_j, j = 1, \dots, m\}$$

Dizemos que a *medida de A* é dada por $M(A) = \prod_{j=1}^m h_j$. Para a união disjunta de paralelepí-

pedos $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$, temos $M(A) = \sum_{k=1}^n M(A_k)$. A *medida do conjunto vazio* é, por definição, zero.

Teorema (Propriedades da medida). *A medida de conjuntos elementares, i.e. que se decompõem em paralelepípedos rectangulares cuja intersecção é quando muito o bordo, verifica as seguintes propriedades:*

- (a) $A \subset B \implies M(A) \leq M(B)$;
- (a) A, B conjuntos elementares de \mathbb{R}^m então

$$A + B = \{z \in \mathbb{R}^m : z = x + y, x \in A, y \in B\}$$

é *elementar* e $M(A + B) \leq M(A) + M(B)$.

- (c) *Se cortarmos um conjunto elementar A por hiperplanos ortogonais $x_j = c$ ficamos com dois paralelepípedos elementares A_1, A_2 tais que $M(A) = M(A_1) + M(A_2)$.*

Esta noção permite-nos definir medida de um conjunto. Para tal considere-se num espaço de dimensão m (por exemplo \mathbb{R}^m), uma rede de *cubos*

$$P_N = \{x \in \mathbb{R}^m : k_j h \leq x_j \leq (k_j + 1)h, k_j = \pm 1, \dots, j = 1, \dots, m, \\ \text{e } h = 1/2^N, N \in \mathbb{N}\}.$$

Note que quando passamos da rede P_N para a P_{N+1} , cada cubo transforma-se em 2^m cubos.

Seja A um subconjunto limitado em \mathbb{R}^m . Considerem-se agora os conjuntos elementares \bar{A}_N , conjunto dos cubos que contêm A e pelo menos um ponto de $\mathbb{R}^m \setminus A$, e \underline{A}_N , conjunto dos cubos que contêm unicamente pontos do interior geométrico de A . Formamos assim duas sucessões de conjuntos tais que as sucessões $(M(\bar{A}_N))$ e $(M(\underline{A}_N))$ são monótonas decrescente e crescentes, respectivamente e $M(\underline{A}_N) \leq M(\bar{A}_N)$. Como as sucessões, $(M(\bar{A}_N))$ e $(M(\underline{A}_N))$

são limitadas, a primeira superiormente por $M(\bar{A}_1)$ e a segunda inferiormente por $M(\underline{A}_1)$, existem os limites

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M(\underline{A}_N) = M_i(A), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} M(\bar{A}_N) = M_e(A)$$

que designaremos por *medida interior de A*, $M_i(A)$ e *exterior de A*, $M_e(A)$.

Definição 3.1. Um conjunto, $A \subset \mathbb{R}^m$, é dito *mensurável à Jourdan* se $M_i(A) = M_e(A)$ e neste caso $M(A) = M_i(A) = M_e(A)$.

Teorema (Resultado fundamental de conjuntos mensuráveis). *Um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^m$ é mensurável à Jourdan quando e só quando, o seu bordo $\text{fr}(A)$ tiver medida de Jourdan nula, i.e. $M(\text{fr}(A)) = 0$.*

Teorema (Estabilidade de conjuntos mensuráveis).

- (a) *Sejam M um conjunto limitado de \mathbb{R}^{m-1} , mensurável à Jourdan e f uma função real contínua definida em M . Então o conjunto $M \times f(M)$ tem medida nula*
- (b) *Consider a sucessão de conjuntos mensuráveis à Jourdan, A_j , $j = 1, \dots, n$. Então, são também mensuráveis à Jourdan os conjuntos*

$$A = \bigcup_{j=1}^n A_j, \quad \bigcap_{j=1}^n A_j.$$

- (c) *Além disso, se os conjuntos A_j se não intersectarem, então $M(A) = \sum_{j=1}^n M(A_j)$.*

3.2. Noção de integral múltiplo à Riemann. Vamos começar por estender o conceito de integral a funções reais de várias variáveis reais definidas em regiões de \mathbb{R}^n .

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável à Jourdan e f uma função definida em A . Considere-se a partição, R , de A em conjuntos mensuráveis A_j cuja intersecção de dois quaisquer elementos é quando muito o bordo. Em cada elemento, A_j , da partição considere-se um ponto ξ_j e formemos a *soma integral de f sobre R*

$$S_R(\xi) = \sum_{j=1}^{n-1} f(\xi_j) M(A_j), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Considere-se agora o maior dos *diâmetros dos $A_j \in R$* , i.e.

$$\Delta = \max_{j=1, \dots, n} \sup_{x, y \in A_j} \|x - y\|.$$

Dizemos que S é o limite das somas integrais, $S_R(\xi)$, quando $\Delta \rightarrow 0$, se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0: \forall R \text{ com } \Delta < \delta \text{ e } \xi_j \in A_j \implies |S_r(\xi) - S| < \epsilon.$$

Desta forma, f é uma função *integrável à Riemann sobre A* , se as somas integrais desta função, S_R convergem para S quando $\Delta \rightarrow 0$. Designamos S por *integral múltiplo de f sobre A* e denotamo-lo por

$$S = \int_A f \, dx = \int_A f(x) \, dx_1 \dots dx_n.$$

Exemplo 3.1.

(a) Se $f \equiv c$ sobre um conjunto mensurável A , então $\int_A f \, dx = cM(A)$.

(b) Se A é um conjunto de medida M nula, i.e. $M(A) = 0$, então $\int_A f \, dx = 0$, mesmo se f não for limitada em A .

Observação . Para os integrais múltiplos, a integrabilidade de uma função sobre um conjunto, não nos diz que f seja limitada sobre esse conjunto. No entanto, vamos somente considerar nesta parte do curso de Cálculo III, funções limitadas sobre conjuntos mensuráveis.

Exemplo 3.2. Considere-se a superfície diferenciável de equação $z = f(x, y)$ definida numa região do plano XOY , D , e definimos o sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Calcule o volume de S .

Ideia de cálculo: Dividimos a região D em sub-regiões mediante uma rede quadriculada de lados paralelos a OX e a OY , que denotaremos por D_1, D_2, \dots, D_n . Em cada uma destas regiões escolhemos um ponto (ξ_i, η_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Formamos a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \text{área}(D_k).$$

Seja agora Δ o maior dos *diâmetros dos conjuntos* D_j , $j = 1, \dots, n$, i.e.

$$\Delta = \max_{j=1, \dots, n} \sup_{x, y \in D_j} \|x - y\|.$$

O *volume de S* vem dado pelo seguinte limite

$$\text{Volume}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \text{área}(D_k).$$

A este tipo de limites designamos por *integral duplo* de f sobre $D \subset \mathbb{R}^2$, e denotamo-lo por $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$. *c. q. d.*

Exemplo 3.3. A *massa, M , de um sólido* $S \subset \mathbb{R}^3$ de densidade ρ , função real contínua, definida sobre S , vem dada por

$$M = \iiint_S \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Observação . Os integrais múltiplos foram introduzidos por Euler e constituem um instrumento fundamental para várias áreas do conhecimento humano.

Teorema (Propriedades do integral). *Supondo que as funções dadas são integráveis nos conjuntos mensuráveis indicados, podemos enunciar:*

$$\textbf{Linearidade:} \int_A (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, dx = c_1 \int_A f_1 \, dx + c_2 \int_A f_2 \, dx, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

União disjunta: $\int_A f \, dx = \int_B f \, dx + \int_C f \, dx$, onde $A = B \cup C$ onde $B \cap C \subset \text{fr}(B) \cap \text{fr}(C)$.

Monotonia: $\int_A f \, dx \leq \int_A g \, dx$ se $f(x) \leq g(x)$, $x \in A$.

Módulo: $\left| \int_A f \, dx \right| \leq \int_A |f| \, dx$

Valor médio: Supondo $g(x) \geq 0$, $x \in A$, temos

$$\int_A fg \, dx = \mu \int_A g \, dx, \quad \inf_{x \in A} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in A} f(x).$$

Além disso, se $g \equiv 1$, então $\int_A f \, dx = \mu M(A)$.

Podemos reduzir integrais múltiplos sobre espaços de uma determinada dimensão a uma sucessão de integrais sobre espaços de dimensão inferior, como nos é referido no teorema sobre integrabilidade de integrais paramétricos e na observação que lhe segue. Este processo vai ser designado por passagem de integrais múltiplos a *integrais iterados*.

Problema 3.1.

(a) Calcule $\iint_M x^y \, dx \, dy$ sendo $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b\}$.

(b) Mostre que $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx = \ln(b+1) - \ln(a+1)$.

Resolução.

(a) Começemos por expressar o integral duplo como integral iterado

$$\int_0^1 \ln x \, dx \int_a^b \frac{x^y}{\ln x} \, dy = \iint_M x^y \, dx \, dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \, dx.$$

Primitivando obtemos

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \, dx = \iint_M x^y \, dx \, dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} \, dy.$$

Assim $\iint_M x^y \, dx \, dy = \ln(b+1) - \ln(a+1)$.

Note-se que a função integranda do primeiro integral não é elementarmente primitivável.

(b) Da resolução da alínea (a) temos a igualdade pretendida. *c. q. d.*

3.3. Fórmula de mudança de variável. Exemplos.

Teorema (Mudança de variável no integral). *Sejam A e B domínios de \mathbb{R}^p com B de medida finita (i.e. comprimento, área ou volume finitos). Sejam ainda, uma aplicação φ de classe C^1 , de B para A tal que o seu jacobiano, J , não se anula em pontos de B e f integrável em A . Então,*

$$\int_A f \, dx_1 \, dx_2 \dots \, dx_p = \int_{\varphi^{-1}(A)} f \circ \varphi |J| \, dt_1 \, dt_2 \dots \, dt_p, \quad |J| = \det D\varphi.$$

3.3.1. *Caso geral.*

Problema 3.2. Calcule o integral $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3}\}$ com $a > 0$, e $f(x, y) = (a^{2/3} - x^{2/3} - y^{2/3})^2$.

Observação . Justifique que pode efectuar a mudança de variável, φ , definida por

$$x = u \cos^3 v, \quad y = u \sin^3 v.$$



FIGURA 1. Caso geral (transformação φ)

Resolução. Como se pode ver da análise da figura 1 a transformação apresentada é bijectiva de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+$ em \mathbb{R}^2 . Além disso, o Jacobiano $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 3u \cos^2 v \sin^2 v$. Assim,

$$I = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 v \sin^2 v \, dv \int_0^a (a^{2/3} - u^{2/3})^{2/3} u \, du,$$

pelo que $I = 3a^{10/3}\pi/80$.

c. q. d.

3.3.2. *Coordenadas polares.* Considere-se a aplicação φ de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 definida por

$$\varphi(\theta, \rho) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta), \text{ com } a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ que é de classe } C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

O seu jacobiano é dado por $J = D\varphi = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)} = ab\rho$. Esta aplicação é bijectiva de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+$ em \mathbb{R}^2 .

Seja f uma função integrável em $D \subset \mathbb{R}^2$ então

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\varphi^{-1}(D)} f \circ \varphi(\theta, \rho) ab\rho \, d\theta \, d\rho.$$

Observação . Esta mudança de coordenadas é aconselhável para descrever regiões do tipo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r_1^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq r_2^2, \theta_1 \leq \arctan(bx/(ay)) \leq \theta_2\}.$$

Neste caso $D = \varphi([\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2])$ (cf. figura 2).

3.3.3. *Coordenadas cilíndricas.* Considere-se a aplicação φ de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 definida por $\varphi(\theta, \rho, \zeta) = (a\rho \cos \theta, b\rho \sin \theta, \zeta)$, com $a, b \in \mathbb{R}^+$ que é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. O seu jacobiano é dado por $J = D\varphi = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \rho, \zeta)} = ab\rho$. Esta aplicação é bijectiva de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R}^3 .

Seja f uma função integrável em $D \subset \mathbb{R}^3$ então

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\varphi^{-1}(D)} f \circ \varphi(\theta, \rho, \zeta) ab\rho \, d\theta \, d\rho \, d\zeta.$$



FIGURA 2. Coordenadas polares

Observação . Esta mudança de coordenadas é aconselhável para descrever regiões do tipo

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq r_2^2, \theta_1 \leq \arctan(bx/(ay)) \leq \theta_2, \zeta_1 \leq z \leq \zeta_2\}.$$

Neste caso $D = \varphi([\theta_1, \theta_2] \times [r_1, r_2] \times [\zeta_1, \zeta_2])$ (cf. figura 3).

3.3.4. *Coordenadas esféricas.* Considere-se a aplicação φ de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 definida por

$$\varphi(\theta, \phi, \rho) = (a\rho \sin \phi \cos \theta, b\rho \sin \phi \sin \theta, c\rho \cos \phi), \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}^+,$$

que é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. O seu jacobiano $J = D\varphi = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \phi, \rho)} = abc\rho^2 \sin \phi$. Esta aplicação é bijectiva de $[0, 2\pi] \times [0, \pi] \times \mathbb{R}^+$ em \mathbb{R}^3 .

Seja f uma função integrável em $D \subset \mathbb{R}^3$ então

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\varphi^{-1}(D)} f \circ \varphi(\theta, \phi, \rho) abc\rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho.$$

Observação . Esta mudança de coordenadas é aconselhável para descrever regiões do tipo

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2 \leq x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq r_2^2, \theta_1 \leq \arctan(bx/(ay)) \leq \theta_2, \phi_1 \leq \arctan(z/\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}) \leq \phi_2\}.$$

Neste caso $D = \varphi([\theta_1, \theta_2] \times [\phi_1, \phi_2] \times [r_1, r_2])$ (cf. figura 4).

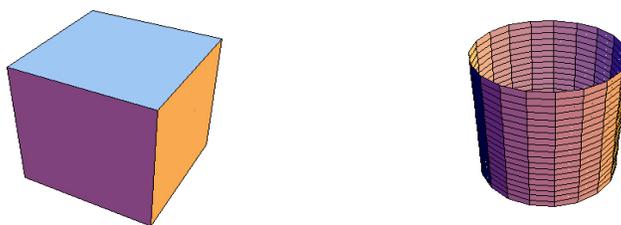


FIGURA 3. Coordenadas cilíndricas

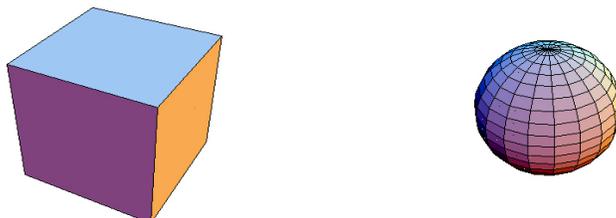


FIGURA 4. Coordenadas esféricas

4. INTEGRAIS CURVILÍNEOS

4.1. Integrais curvilíneos de funções reais.

Definição 4.1. Ao conjunto de pontos

$$\gamma = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m : x_j = X_j(t), t \in [a, b], j = 1, 2, \dots, m\}$$

onde as funções X_j são contínuas, para $j = 1 \dots, m$, designamos por *curva contínua* no espaço vectorial de dimensão m , \mathbb{K}^m .

Observação . Definimos assim, γ como o transformado do conjunto $[a, b]$ pela aplicação X definida por $X(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t))$. Vamos exigir a esta função que tenha quando muito um número finito de *pontos múltiplos*, i.e.

$$\text{dados } t_2, t_1 \in [a, b], \text{ com } t_2 \neq t_1 \implies \|X(t_2) - X(t_1)\| \neq 0.$$

Definição 4.2. Seja γ uma curva definida por $x = X(t)$ uma curva contínua. Consideremos a *partição*, R , do intervalo $[a, b]$, definida por $R \equiv a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e seja $\Delta = \max_{j=1, \dots, n} |t_j - t_{j-1}|$ o seu *diâmetro*. Se existir o limite

$$\ell(\gamma) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \|X(t_j) - X(t_{j-1})\|$$

e for independente da partição do intervalo $[a, b]$, dizemos que $\ell(\gamma)$ é o *comprimento da curva* γ e que a *curva* γ é *rectificável*.

Observação . Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 3$ temos $\|X(t)\| = \sqrt{X_1^2(t) + X_2^2(t) + X_3^2(t)}$.

Teorema 4.1. *Seja γ uma curva rectificável. Se a função X' for integrável, então*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|X'(t)\| dt.$$

Observação . Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 3$ temos

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(X'_1(t))^2 + (X'_2(t))^2 + (X'_3(t))^2} dt.$$

A *curva* γ admite *infinitas representações* da forma $x = X \circ f(\tau)$, onde f é uma função real diferenciável em $[\alpha, \beta]$, $f'(\tau) \neq 0$ em $[\alpha, \beta]$ e $f([\alpha, \beta]) = [a, b]$. A τ designamos por *parâmetro da curva* γ . Assim, f' tem sinal constante em $[\alpha, \beta]$. Dizemos então, que γ tem *orientação positiva* e denotamos a curva por γ_+ , se $f'(\tau) > 0$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, e que γ tem *orientação negativa* e denotamos a curva por γ_- , se $f'(\tau) < 0$, $\tau \in [\alpha, \beta]$.

Dizemos que s é o *parâmetro natural*, da curva γ definida por $x = X(t)$, se

$$s(t) = \int_a^t \|X'(\tau)\| d\tau, \text{ e } \|X'(\tau)\| \neq 0, \tau \in [a, b].$$

Note-se que $s(b) = \ell(\gamma)$, que passaremos a denotar por ℓ .

Representando γ em termos do parâmetro natural s , temos $x = X(t)$ e $x = \psi \circ s(t)$. Assim, o vector tangente a γ em cada um dos seus pontos vem dado por $X'(t) = \psi'(s(t))s'(t)$,

donde se concluí que $\|X'(t)\| = \|\psi'(s(t))\| \left| \frac{ds}{dt} \right|$. Por definição de parâmetro natural $\left| \frac{ds}{dt} \right| = \|X'(t)\|$, e portanto $\|\psi'(s)\| = 1$. Temos assim que o parâmetro natural de uma curva, nos dá um processo simples de cálculo de um vector unitário, tangente a essa curva em cada um dos seus pontos.

Problema 4.1. Determinar o ângulo que o vector unitário, tangente à curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad t \in \mathbb{R},$$

faz com o plano OZ , no ponto $(1, 1, 1)$.

Resolução. O vector procurado é da forma

$$\vec{u} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) / \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}$$

que para $t = 1$ nos dá $\vec{u} = (1, 2, 3)/\sqrt{14}$. A sua projecção sobre OZ é o vector $\vec{u}_z = (1, 2, 0)/\sqrt{14}$, pelo que o ângulo pedido é dado por $\arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}_z}{\|\vec{u}_z\|}\right) = \arccos \sqrt{5/14}$. *c.q.d.*

Problema 4.2. Calcule o comprimento da curva γ definida por

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad t \in [0, 2\pi],$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

Resolução. Aplicando a definição de comprimento de uma curva diferenciável temos

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} dt$$

e portanto $\ell(\gamma) = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$. *c.q.d.*

Definição 4.3. Sejam, s o parâmetro natural da curva $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, definida por $x = X(s)$, $s \in [0, \ell]$ e f uma função real contínua definida em \mathbb{R}^n . Ao integral

$$I = \int_0^\ell f \circ X(s) ds = \int_0^\ell f(X_1(s), \dots, X_n(s)) ds$$

designamos por *integral curvilíneo de uma função real f* ao longo da curva γ , e denotamo-lo por $\int_\gamma f ds$.

Observação . Tomando para γ outra parametrização, $x = X(t)$, $t \in [a, b]$, temos que I toma a forma

$$\int_a^b f \circ X(t) \|X'(t)\| dt,$$

donde se concluí que o integral curvilíneo de funções reais é independente da orientação da curva γ .

Definição 4.4. Seja γ uma curva de densidade por unidade de comprimento, ρ . Definimos *massa de γ* e denotamo-la por M , como $M = \int_0^\ell \rho(s) \, ds$.

4.2. Integrais curvilíneos de funções vectoriais.

Definição 4.5. Sejam, s o parâmetro natural da curva $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, definida por $x = X(s)$, $s \in [0, \ell]$ e F uma função vectorial contínua definida em \mathbb{R}^n por

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)).$$

Ao integral

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\ell F \circ X(s) |X'(s)| \, ds \\ &= \int_0^\ell (F_1(X_1(s), \dots, X_n(s)), \dots, F_n(X_1(s), \dots, X_n(s))) |X'(s)| \, ds \end{aligned}$$

designamos por *integral curvilíneo de uma função vectorial F* ao longo da curva γ , e denotamo-lo por

$$\int_\gamma F_1 \, dx_1 + \dots + F_n \, dx_n,$$

pois $X'_j(s) \, ds = dx_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Observação . Tomando para γ outra parametrização, $x = X(t)$, $t \in [a, b]$, temos que I toma a forma

$$I = \int_a^b (F_1 X'_1(t) + \dots + F_n X'_n(t)) \, dt.$$

Vemos assim, que

$$\int_{\gamma_+} F_1 \, dx_1 + \dots + F_n \, dx_n = - \int_{\gamma_-} F_1 \, dx_1 + \dots + F_n \, dx_n.$$

Definição 4.6. Dizemos que a *curva γ* , definida por $x = X(t)$, $t \in [a, b]$ é *fechada*, se $X(a) = X(b)$. Neste caso ao integral curvilíneo de uma função vectorial F , designamos por *circulação de F ao longo de γ* .

Observação . No caso em que a função vectorial F de expressão analítica

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

se pode representar como o gradiente de alguma função real, i.e. $F = \text{grad } f(x)$, então

$$I = \int_\gamma F_1 \, dx_1 + \dots + F_n \, dx_n = \int_0^\ell \frac{df(X(s))}{ds} \, ds,$$

e portanto $I = f \circ X(\ell) - f \circ X(0)$.

4.3. Aplicações.

Problema 4.3. Suponhamos que um sólido se desloca ao longo de uma curva γ sob a acção de uma força $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Calcule o trabalho da força F .

Demonstração. Exercício.

c.q.d.

Problema 4.4. Considere a curva γ definida por
$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} .$$

(a) Identifique a curva γ .

(b) Calcule, usando cálculo integral, o comprimento da curva a partir do integral de comprimento de arco.

(c) Calcule $I = \int_{\gamma} z \, dx + x \, dy + y^4 \, dz$.

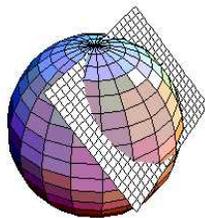


FIGURA 5. Superfície do problema 4.4

Resolução.

(a) A curva γ é a circunferência intersecção, do plano perpendicular ao vector $(1, 0, 1)$ passando pelo ponto de coordenadas $(1, 0, 0)$, com a esfera centrada em $(0, 0, 0)$ de raio 1 (cf. figura 5).

(b) O comprimento pedido é dado por $\ell(\gamma) = \int_{\gamma} ds$ onde ds designa o *elemento de comprimento de arco*, i.e. $\|\vec{T}\| dt$ onde \vec{T} é o vector tangente a γ em cada um dos seus pontos e t é o parâmetro natural da curva γ .

As equações cartesianas de γ são dadas por

$$z = 1 - x, \quad \frac{(x - 1/2)^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1,$$

peço admite a seguinte parametrização

$$x = \frac{1}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \quad z = \frac{1}{2}(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Assim, $\vec{T} = (-\sin t/2, \cos t/\sqrt{2}, \sin t/2)$, e portanto $\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1/\sqrt{2} \, dt = \sqrt{2}\pi$.

(c) Aplicando a definição de integral temos

$$I = \int_0^{2\pi} \left[(1 - \cos t)/2(-\sin t/2) + (1 + \cos t)/2(\cos t/\sqrt{2}) + (\sin t/\sqrt{2})^4(\sin t/2) \right] dt,$$

i.e., $I = \sqrt{2}\pi/4$.

c.q.d.

5. INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

5.1. Integral de superfície de funções reais.

Definição 5.1. Uma *superfície diferenciável*, T , é dita *orientável*, se em cada um dos seus pontos x , podemos determinar um vector normal unitário \vec{n} , de forma que a aplicação de T em \mathbb{R}^n definida por $\vec{n} = \vec{n}(x)$ seja contínua em T .

Dizemos que a *superfície diferenciável* T tem *orientação positiva* se $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 | \vec{n} > 0$ em cada $x \in T$, onde \vec{t}_1, \vec{t}_2 são os vectores directores do plano tangente a T em $x \in T$.

Da mesma forma dizemos que a *superfície diferenciável*, T , tem *orientação negativa* se $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 | \vec{n} < 0$ em cada $x \in T$, onde \vec{t}_1, \vec{t}_2 são os vectores directores do plano tangente a T em $x \in T$.

Vimos já que um vector normal unitário \vec{n} a uma superfície diferenciável T definida em coordenadas cartesianas por $f(x) = 0$, onde f é uma função real definida em \mathbb{R}^n , vem dado por

$$\vec{n}(x) = \text{grad } f(x) / \|\text{grad } f(x)\|, \quad x \in T.$$

Além disso, se $T \subset \mathbb{R}^3$ estiver definida em coordenadas paramétricas por

$$(2) \quad x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \quad z = Z(u, v), \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

onde D é um domínio, então um vector normal unitário \vec{n} em cada ponto $(x, y, z) \in T$, vem dado por

$$\left(\left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| \right) / \sqrt{\left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right|^2}.$$

Definição 5.2. Seja T uma superfície diferenciável definida parametricamente por (2). Ao integral

$$\sigma(T) = \iint_D \sqrt{\left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right|^2} \, du \, dv,$$

designamos por *área da superfície diferenciável* T , e denotamo-lo por $\sigma(T) = \iint_T dS$, onde dS representa o *elemento de área de superfície*.

Considere-se a função real, g , diferenciável em \mathbb{R}^3 , ao integral

$$\begin{aligned} & \iint_T g(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_D g(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \sqrt{\left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right|^2} \, du \, dv, \end{aligned}$$

designamos por *integral de superfície da função real g sobre T* .

Observação . Este integral não depende da orientação da superfície.

5.2. Integral de superfície de funções vectoriais.

Definição 5.3. Sejam T uma superfície diferenciável definida parametricamente por (2) e F uma função vectorial contínua definida em \mathbb{R}^3 por

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Ao integral

$$\begin{aligned} \iint_T F \, dS &= \iint_T F | \vec{n} \, dS \\ &= \iint_D F(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \left(\left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| \right) \, du \, dv, \end{aligned}$$

designamos por *integral de superfície da função vectorial F sobre T* , onde a curva $\text{fr } T$ está considerada com a orientação positiva.

5.3. Aplicações.

Problema 5.1. A área de superfície do triângulo de vértices $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ e $C = (0, 0, c)$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ é igual a $\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}/2$.

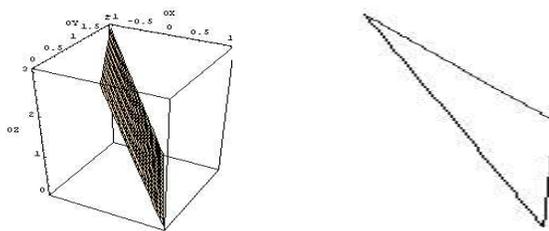


FIGURA 6. Triângulo sobre o Paralelogramo

Resolução.

Primeiro Método: As equações paramétricas do plano onde o triângulo se encontra, i.e. o plano que passa pelo ponto $(a, 0, 0)$ e tem a direcção dos vectores $\vec{AB} = (-a, b, 0)$ e $\vec{AC} = (-a, 0, c)$ (cf. figura 6), são dadas por

$$x = a - sa - ta, \quad y = sb, \quad z = tc, \quad (s, t) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Assim, um vector perpendicular ao plano vem dado por $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (bc, ac, ab)$. Temos então que área vem dada pelo integral

$$\frac{1}{2} \int_0^1 ds \int_0^1 \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2} \, dt,$$

i.e. a área pedida é $\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}/2$.

Segundo Método: A equação cartesiana do plano onde o triângulo se encontra, é dada por

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Assim sendo o vector perpendicular à região vem dado por $\vec{n} = (-c/a, -c/b, 1)$ cuja norma é $\|\vec{n}\| = \sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}/ab$. Obtemos então a área da superfície dada por meio do integral

$$\int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} \|\vec{n}\| dy,$$

pois o triângulo é descrito em coordenadas cartesianas por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b(1 - x/a), z = c(x/a - y/b)\}. \quad c.q.d.$$

Problema 5.2. Calcule a área de superfície do cilindro de equação $x^2 + y^2 = x$, contido na esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Resolução. Começemos por descrever a esfera dada em coordenadas esféricas, i.e.

$$x = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \phi,$$

com $0 \leq \rho \leq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$. Além disso, a equação da superfície cilíndrica neste sistema de coordenadas vem dada por $\rho \sin \phi = \cos \theta$. Assim, a superfície procurada vem dada por

$$x = \cos^2 \theta, \quad y = \cos \theta \sin \theta, \quad z = \cos \theta \cotan \phi,$$

com θ, ϕ sujeitas à condição $0 \leq \cos \theta / \sin \phi \leq 1$ e $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, i.e. para $0 \leq \phi \leq \pi/2$

$$\pi/2 - \phi \leq \theta \leq \pi/2, \quad \text{ou} \quad , \quad 3\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2 + \phi$$

e para $\pi/2 \leq \phi \leq \pi$

$$-\pi/2 + \phi \leq \theta \leq \pi/2, \quad \text{ou} \quad , \quad 3\pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/2 - \phi.$$

Agora, como $\|\vec{n}\| = |\cos \theta| / \sin^2 \phi$ temos que a área de superfície vem dada por

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} \left(\int_{\pi/2-\phi}^{\pi/2} + \int_{3\pi/2}^{3\pi/2+\phi} \cos \theta d\theta \right) + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} \left(\int_{-\pi/2+\phi}^{\pi/2} + \int_{3\pi/2}^{5\pi/2-\phi} \cos \theta d\theta \right)$$

que é igual a 4.

c.q.d.

Problema 5.3. A área da superfície terrestre de raio r , T , compreendida entre os meridianos de longitude θ_1, θ_2 e os paralelos de latitude ϕ_1, ϕ_2 é dada por

$$r^2(\theta_2 - \theta_1)(\sin \phi_2 - \sin \phi_1).$$



FIGURA 7. Superfície terrestre

Resolução. Começemos por descrever a superfície indicada no enunciado (cf. figura 7)

$$x = r \sin \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \phi,$$

com $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ e $\phi \in [\pi/2 - \phi_2, \pi/2 - \phi_1]$.

Sabemos também que o vector normal exterior vem dado por

$$\vec{n} = \left(\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(\theta, \phi)} \right|, \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(\theta, \phi)} \right|, \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} \right| \right),$$

i.e.

$$\vec{n} = r^2 \sin \phi (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

cuja norma é $\|\vec{n}\| = r^2 \sin \phi$.

Aplicando a definição de área de superfície temos

$$\text{Área}(T) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\pi/2-\phi_2}^{\pi/2-\phi_1} \|\vec{n}\| d\phi = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\pi/2-\phi_2}^{\pi/2-\phi_1} r^2 \sin \phi d\phi,$$

i.e. $\text{Área}(T) = r^2(\theta_2 - \theta_1)(\sin \phi_2 - \sin \phi_1)$. *c.q.d.*

Problema 5.4. Calcule $I = \iint_S F |\vec{n}| dS$ onde S é a superfície definida parametricamente por:

$$x = u + v, \quad y = uv, \quad z = u^2 - v^2, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

e $F(x, y, z) = (z, x, y)$.

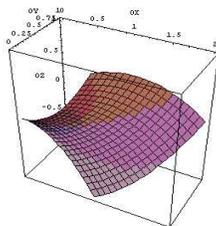


FIGURA 8. Superfície do problema 5.4

Resolução. Antes de mais representemos a superfície dada (cf. figura 8). Assim, vamos determinar um vector normal em cada um dos pontos da superfície dada

$$\vec{n} = (-2(u^2 + v^2), 2(u + v), u - v).$$

Por definição I vem dado por

$$I = \int_0^1 du \int_0^1 (-2(u^4 - v^4) + 2(u + v)^2 + uv(u - v)) dv$$

cuj valor é $I = 7/3$.

c.q.d.

6. TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO INTEGRAL

6.1. Teorema de Gauss-Ostrogradsky.

Teorema (de Gauss-Ostrogradsky ou da Divergência). *Seja F uma função vectorial de classe C^1 sobre um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$, de expressão analítica*

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

Seja G um conexo e fechado de D cuja fronteira $\text{fr } G = T \subset D$. Então,

$$\iiint_G \text{div } F(x, y, z) \, dV = \int_T F(x, y, z) \, dS,$$

onde dV e dS representam respectivamente, o elemento de volume e de área de superfície.

Observação . Como a superfície dada no problema 5.4 não delimita um sólido (cf. figura 8), não podemos aplicar o Teorema da Divergência para calcular o seu valor.

Problema 6.1. *Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$.*

- Represente geometricamente a região M .*
- Justifique que pode tomar (θ, ϕ, ρ) como um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 , onde*

$$x = a\rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = c\rho \cos \phi.$$

- Descreva o interior geométrico da região M neste novo sistema de coordenadas.*
- Calcule o volume da região descrita na alínea anterior.*
- Indique um vector normal unitário, $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, à região M em cada um dos seus pontos.*
- Calcule o integral de superfície*

$$I = \iint_M (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, dS$$

onde $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ é o vector normal unitário à região M .

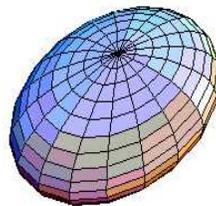


FIGURA 9. Elipsoide

Resolução.

- Ver figura 9.
- As funções de expressão analítica $X(\theta, \phi, \rho) = a\rho \sin \phi \cos \theta$, $Y(\theta, \phi, \rho) = b\rho \sin \phi \sin \theta$, $Z(\theta, \phi, \rho) = c\rho \cos \phi$ são funcionalmente independentes em $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \infty[$, e definem uma bijecção entre D e \mathbb{R}^3 .

(c) $M = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 1]$.

(d) Sabemos que o volume de M vem dado por

$$\text{Volume}(\text{int } M) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^1 \left| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\theta, \phi, \rho)} \right| d\rho,$$

mas $\left| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\theta, \phi, \rho)} \right| = abc\rho^2 \sin \phi$, pelo que o volume é igual a $4abc\pi/3$.

(e) $\vec{n} = \rho^2 \sin \phi (bc \sin \phi \cos \theta, ac \sin \phi \sin \theta, ab \cos \phi)$.

(f) Aplicando o Teorema da Divergência obtemos que $I = 3 \text{Volume}(\text{int } M)$, i.e

$$I = 4abc\pi.$$

c.q.d.

Problema 6.2. Sendo $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, x^2 + y^2 - rx \leq 0\}$, mostre que

$$\text{Volume}(T) = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS,$$

onde S é a superfície que limita T , orientada com a normal exterior \vec{n} .

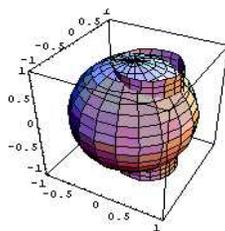


FIGURA 10. Intersecção entre cilindro e esfera

Resolução. Como se pode ver na figura 10 a região T é um sólido fechado e limitado de \mathbb{R}^3 .

Podemos então aplicar o Teorema da Divergência,

$$\iint_S (x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\text{int } S} \text{div}(x, y, z) \, dV = 3 \iiint_T dV = 3 \text{Volume}(T),$$

pelo que se tem o resultado enunciado.

c.q.d.

6.2. Teorema de Riemann-Green.

Teorema (Teorema de Riemann-Green). *Seja F uma função vectorial de classe C^1 sobre um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$, de expressão analítica $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. Seja A_1 um conexo e fechado de D cuja fronteira $\text{fr } A_1 = \gamma \subset D$ é uma curva de classe C^1 fechada. Então,*

$$\iint_{A_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_\gamma F(x, y) \, ds,$$

onde dA e ds representam respectivamente, o elemento de área e de comprimento de arco.

Demonstração. Consideremos que no teorema da divergência, F não depende da variável z , $R \equiv 0$ e que G é um cilindro de base A_1 e de altura h . Considere-se ainda que γ admite a parametrização

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

que é percorrida no sentido directo. Assim, por um lado

$$\iiint_G \operatorname{div} F \, dV = \int_0^h dz \iint_{A_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA,$$

e por outro

$$\iint_T F \, dS = \int_0^h dz \int_{t_0}^{t_1} (P \cos(\vec{n}, OX) + Q \cos(\vec{n}, OY)) dt$$

pois nas bases do cilindro G o integral é nulo ($F \cdot \vec{n} = 0$, pois $\vec{n} = (0, 0, 1)$). Pode ainda ver-se que

$$\cos(\vec{n}, OX) = \frac{dY}{dt}, \quad \cos(\vec{n}, OY) = -\frac{dX}{dt}$$

Então do teorema da divergência temos que

$$\int_{A_1} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA = \int_{t_0}^{t_1} P \, dy + Q \, dx$$

e tomando Q em lugar de $-Q$ nesta última fórmula temos o resultado.

c. q. d.

6.3. Aplicações.

Problema 6.3. *Seja M um conjunto conexo cuja fronteira é uma curva diferenciável, fechada e simples, γ . Então:*

(a) *Se u, v são funções de classe C^1 , tem-se*

$$\int_{\gamma} uv(dx + dy) = \iint_M \left\{ v \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} dx \, dy.$$

(b) *Se u, v são funções de classe C^2 , então:*

$$\int_{\gamma} \left\{ \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy \right\} = \iint_M (u \Delta v - v \Delta u) dx \, dy,$$

$$\text{onde } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

(c) *Se u é tal que $\Delta u = 0$, então* $\int_{\gamma} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right\} = 0$.

Resolução.

(a) e (b) Aplicando o teorema de Green às funções de expressão analítica $F_a(x, y) = (uv, uv)$ e $F_b(x, y) = \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right)$, onde u e v são funções reais nas variáveis reais x, y , respectivamente obtemos o resultado enunciado.

(c) Tomando $v \equiv -1$ na igualdade da alínea (b) obtemos

$$\int_{\gamma} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right\} = \iint_M \Delta u \, dx \, dy.$$

Agora aplicando a hipótese temos o pretendido.

c. q. d.

6.4. Teorema de Stokes.

Teorema (de Stokes). *Seja F uma função vectorial de classe C^1 sobre um domínio $D \subset \mathbb{R}^3$. Seja γ uma curva fechada em D que é a fronteira de alguma superfície fechada orientada $T \subset D$, i.e. $\text{fr} T = \gamma$. Então,*

$$\int_{\gamma} F(x, y, z) \, ds = \int_T \text{rot } F(x, y, z) \, dS,$$

onde ds e dS representam respectivamente, o elemento de comprimento de arco e de área de superfície.

Observação . O teorema que acabámos de enunciar diz-nos que o fluxo do vector $\text{rot } F$ através da superfície orientada, T , é igual à circulação do vector F sobre o bordo, γ que delimita T .

6.5. Aplicações.

Problema 6.4. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$F(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} + e^{-z} \vec{k}.$$

Calcule o $I = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} \, dx + \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy + e^{-z} \, dz$, quando:

- $C = \{(x, y, a) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$ com $a \in \mathbb{R}$.
- C for uma qualquer curva fechada no espaço que não contiver nenhum ponto do eixo OZ no seu interior geométrico.
- C é uma qualquer curva fechada, simples, parcialmente suave no plano $z = a$, que contém o ponto $(0, 0, a)$ no seu interior geométrico.

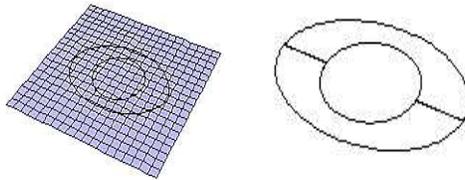


FIGURA 11. Curvas fechadas no plano $z = 3$

Resolução.

- Comecemos por descrever a curva C em coordenadas paramétricas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = a, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Assim um vector tangente a C em cada um dos seus pontos, $\vec{T} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$, pelo que

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \sin \theta}{r^2} (-r \sin \theta) + \frac{r \cos \theta}{r^2} (r \cos \theta) + e^a(0) \right) dt = \int_0^{2\pi} dt.$$

Vemos então que $I = 2\pi$.

Note-se que não podemos aplicar o Teorema de Stokes para resolver este exercício pois a função F não é de classe C^1 no interior geométrico de C .

(b) Neste caso podemos aplicar o teorema de Stokes pois F é de classe C^1 no interior geométrico de C . Agora, como o rotacional de F , $\text{rot } F = (0, 0, 0)$, concluímos que $I = 0$.

Note-se que como o rotacional é o vector nulo existe uma função real de variáveis reais (x, y, z) , g , tal que $F = \text{grad } g(x, y, z)$, e portanto o integral é independente do caminho considerado, numa região que não contenha pontos da forma $(0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Desta forma concluímos também que $I = 0$.

(c) $I = 2\pi$. De facto, considere-se a circunferência C_1 de raio infinitamente pequeno centrada em $(0, 0, a)$ que com C admite uma representação do tipo da figura 11. Construimos assim a curva $\gamma = C_1 \cup C$ que admite a decomposição que se mostra na figura 11, i.e. $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$. Agora,

$$J = \int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + e^{-z} dz.$$

Além disso, como no interior geométrico de cada uma das curvas γ_+ , γ_- , F é de classe C^1 , podemos aplicar o teorema de Green a cada um dos integrais anteriores em que se decompõe J , concluindo desta forma que $J = 0$.

Eliminando os caminhos que são percorridos nos dois sentidos, vemos que

$$J = \int_{C \cup \overline{C_1}} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + e^{-z} dz,$$

e portanto, aplicando as propriedades do integral curvilíneo

$$I = \int_{C_1} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy + e^{-z} dz$$

e pela alínea (a) temos o resultado.

c. q. d.

Problema 6.5. Sendo γ a curva definida pelas equações

$$x = \cos t, \quad y = \cos 2t, \quad z = \cos 3t, \quad t \in [0, \pi],$$

então $I = \int_{\gamma} (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz = 8/3$.

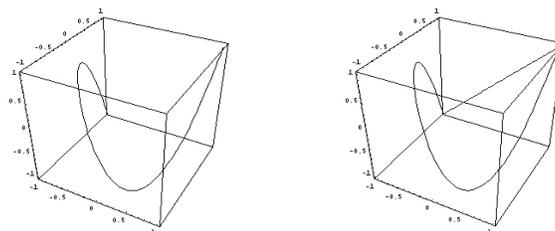


FIGURA 12. Curvas do problema 6.5

Resolução.

Primeiro Método: Tendo em atenção que o vector tangente à curva dada é

$$-(\sin t, 2 \sin(2t), 3 \sin(3t)),$$

e que a curva dada não é fechada (cf. figura 12) temos que

$$I = \int_0^\pi -[(\cos(2t) + \cos(3t)) \sin t + (\cos t + \cos(3t))2 \sin(2t) + (\cos(t) + \cos(2t))3 \sin(3t)] dt,$$

e portanto $I = -4$.

Segundo Método: O campo de vectores de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ de expressão analítica $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ é conservativo, pois

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}.$$

A curva diferenciável, γ , une os pontos $P_0 = (1, 1, 1)$ e $P_1 = (-1, 1, -1)$. Considere-se a curva diferenciável fechada $\Gamma = \gamma \cup \overrightarrow{P_1P_0}$, onde o segmento de recta orientado $\overrightarrow{P_1P_0}$ está definido por

$$x = 2t - 1, \quad y = 1, \quad z = 2t - 1, \quad t \in [0, 1].$$

Aplicando o teorema de Stokes sobre a curva Γ , temos que

$$\int_\Gamma F \, ds = \iint_{\text{int}(\Gamma)} \text{rot } F \, dS = 0.$$

Assim,

$$I = - \int_{\overrightarrow{P_1P_0}} F \, ds = \int_0^1 [(1 + 2t - 1)2 + (2t - 1 + 2t - 1)0 + (2t - 1 + 1)2] dt,$$

e portanto $I = -4$.

Terceiro Método: Vimos já que o campo de vectores F é conservativo. Determinemos então uma função real, f , definida em \mathbb{R}^3 tal que $F = \text{grad } f$, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x + y.$$

Da primeira condição obtemos por primitivação relativamente à variável x que existe uma função real de classe C^1 , h , tal que $f(x, y, z) = (y + z)x + h(y, z)$. Derivando em ordem à variável y e comparando com a segunda condição inicial temos, que existe uma função real de classe C^1 , g , tal que $h(y, z) = yz + g(z)$. Assim, $f(x, y, z) = xy + xz + yz + g(z)$, para alguma função real de variável real g de classe C^1 . Derivando esta função em ordem à variável z e comparando com a terceira condição inicial temos que $g \equiv c$ com c constante real arbitrária. Pelo que um exemplo de função f procurada tem expressão analítica $f(x, y, z) = xy + xz + yz$.

$$\text{Assim, } I = f(-1, 1, -1) - f(1, 1, 1) = -1 - 3 = -4. \quad \text{c.q.d.}$$

ÍNDICE REMISSIVO

- \mathbb{R}^n -metria, 1
- área
 - rectângulo, 2
- baricentro, 19
- bola aberta, 2

- centro de massa, 19
- conjunto
 - aberto, 2
 - compacto, 5
- curva
 - contínua, 4
 - de nível, 3
 - em \mathbb{R}^2 , 11
 - simples, 14
- derivada
 - parcial, 5
 - representação geométrica, 5
- diferenciabilidade
 - condição necessária, 7
 - condição suficiente, 8
 - função composta, 9
- diferencial
 - função vectorial, 8
 - função real, 7
- diferenciável
 - função real, 7
 - função vectorial, 8
- distância, 1

- espaço
 - afim, 1
 - euclídeano, 1
 - vectorial, 1
- extremos
 - condição necessária, 17
 - condição suficiente, 18

- forma quadrática, 18
 - definida negativa, 18
 - definida positiva, 18
 - semi-definida negativa, 18
 - semi-definida positiva, 18
- funções
 - analíticas, 10
 - bijectivas, 13
 - contínuas, 4
 - de Lagrange, 20
 - definidas implicitamente, 11
 - funcionalmente dependentes, 13
 - funcionalmente independentes, 13
 - uniformemente contínuas, 4
 - vectoriais, 3

- geometria, 1

- lagrangiano, 20
- limite
 - direcciona, 4
 - função real, 3
 - função vectorial, 3

- matriz
 - característica, 14
 - definida negativa, 18, 19
 - definida positiva, 18, 19
 - forma quadrática, 18
 - menores, 14
 - menores principais, 19
 - semi-definida negativa, 18, 19
 - semi-definida positiva, 18, 19
- momento
 - de inércia, 19
- Multiplicadores de Lagrange
 - condição suficiente, 20
 - método, 20

- ponto
 - crítico, 17
 - de mínimo, 17
 - de máximo, 17
 - extremante, 17
 - múltiplo, 14

- superfície diferenciável, 15
 - equação cartesiana, 15
 - vector normal, 15

- Taylor
 - polinómio, 11
 - série, 11
- teorema
 - da função implícita
 - diferenciabilidade, 12
 - existência, 12
 - da sandwich, 3
 - de Cauchy, 3
 - de Sylvester, 19
 - de Weierstrass, 5
 - função implícita, 12
 - função inversa, 13
 - funcionalmente dependentes
 - condição necessária, 14
 - condição suficiente, 14
 - incrementos finitos, 6
 - limite por curvas, 4