Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade de Coimbra
Cálculo III - Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Introdução às Equações com Derivadas Parciais

ÍNDICE GERAL

1. Introdução

1.1. Campos de vectores e curvas integrais. Seja

$$\begin{aligned} F : D \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (P(x,y,z)\,,\, Q(x,y,z)\,,\, R(x,y,z)) \end{aligned}$$

uma *função vectorial* ou *campo de vectores* de classe C^1 definida num domínio D e verificando $F(x,y,z) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Exemplo 1.1.

(a) $F(x,y,z) = (1,0,0)$, $D = \mathbb{R}^3$;
(b) $F(x,y,z) = (x,y,z)$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$;
(c) $F(x,y,z) = (y,-x,0)$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$;
(d) $F(x,y,z) = (xyz, (x+y)/z, \exp(x+y+z))$, $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$;
(e) $F(x,y,z) = (x, 2y, -(x+2y))$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$.

Definição 1.1. Dizemos que $C \subset D$ é uma *curva integral* ou *linha de força* do campo de vectores F se C for tangente ao gráfico de F em cada um dos seus pontos.

Assim, as soluções do sistema

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = P\,, \; \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = Q\,, \; \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} = R\,, \tag{1}$$

são as curvas integrais do campo de vectores F.

O sistema (1) pode descrever-se na forma:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{Q}{P}\,, \; \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x} = \frac{R}{P}\,, \quad P \not\equiv 0 \\ &\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = \frac{P}{Q}\,, \; \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,y} = \frac{R}{Q}\,, \quad Q \not\equiv 0 \\ &\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,z} = \frac{P}{R}\,, \; \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,z} = \frac{Q}{R}\,, \quad R \not\equiv 0 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{P} = \frac{\mathrm{d}\,y}{Q} = \frac{\mathrm{d}\,z}{R}\,.$$

Exemplo 1.2. As curvas integrais dos campos de vectores do exemplo 1.1 são as soluções dos seguintes sistemas:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{1} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{0} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{0}$;
(b) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{z}$;
(c) $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{y} = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{-x} = \dfrac{\mathrm{d}\,z}{0}$;

(d) $\dfrac{\mathrm{d}\, x}{xyz} = \dfrac{\mathrm{d}\, y}{(x+y)/z} = \dfrac{\mathrm{d}\, z}{\exp(x+y+z)}$;

(e) $\dfrac{\mathrm{d}\, x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}\, y}{2y} = \dfrac{\mathrm{d}\, z}{-(x+2y)}$.

1.2. **Sistemas de equações diferenciais.** Podemos descrever as curvas integrais associadas a um campo de vectores F como a intersecção de duas superfícies

$$u_1(x,y,z) = c_1\,,\ u_2(x,y,z) = c_2\,. \tag{2}$$

Para tal as funções terão de verificar as seguintes condições:

$$\operatorname{grad} u_1 \times \operatorname{grad} u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\operatorname{grad} u_1 | F = 0\,,\ \operatorname{grad} u_2 | F = 0\,.$$

Observação . Note que se $\operatorname{grad} u_1 \times \operatorname{grad} u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ então u_1 e u_2 são funcionalmente independentes.

Definição 1.2. As funções u tais que $u \in \mathrm{C}^1(D)$, são ditas *soluções integrais* do campo de vectores F se

$$P\frac{\partial\, u}{\partial\, x} + Q\frac{\partial\, u}{\partial\, y} + R\frac{\partial\, u}{\partial\, z} = 0\,,\ x \in D\,. \tag{3}$$

A equações do tipo (3) designamos por *equações com derivadas parciais lineares de primeira ordem.*

Teorema 1.1. *Sejam u_1, u_2 duas soluções integrais, funcionalmente independentes, associadas a F em D. Então as equações (2) descrevem o espaço das curvas integrais de F em D.*

Enunciemos alguns resultados fundamentais.

Teorema (Geração de soluções integrais).

(a) *Seja f uma função real de variável real de classe C^1 e u uma solução integral de F em D. Então $w(x,y,z) = f \circ u(x,y,z)$ é ainda uma solução integral de F em D.*

(b) *Seja g uma função real de duas variáveis reais, de classe C^1 e u, v duas soluções integrais de F em D. Então $w(x,y,z) = g \circ \phi(x,y,z)$ onde*

$$\begin{aligned} \phi : D \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (u(x,y,z)\,,\, v(x,y,z))\,, \end{aligned}$$

é ainda uma solução integral de F em D.

1.3. **Equações com derivadas parciais lineares de primeira ordem.** Vamos ver que as curvas integrais têm um papel fundamental no estudo das equações com derivadas parciais de primeira ordem.

Teorema 1.2. *Sejam u_1, u_2 duas soluções integrais de F em D, funcionalmente independentes. Seja u uma qualquer solução de (3) e (x_0, y_0, z_0) um qualquer ponto de D. Então existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de (x_0, y_0, z_0) em D e uma função f de classe C^1 tal que*

$$u(x,y,z) = f \circ \phi(x,y,z)\,,\ (x,y,z) \in \mathcal{V} \tag{4}$$

onde $\phi(x,y,z) = (u_1(x,y,z), u_2(x,y,z))$.

Observação . Este resultado diz-nos que, localmente a solução geral de (3) vem dada por (4) para u_1, u_2 soluções funcionalmente independentes de (1).

Problema 1.1. *Determine a solução geral da equação*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0\,,\ x \in D\,.$$

Resolução. Considere-se o campo de vectores $F(x,y,z) = (x,y,z)$ em $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0\}$ e determinemos as curvas integrais de F, i.e. as soluções do sistema diferencial

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = \frac{\mathrm{d}\,z}{z}\,.$$

Pode ver-se que as curvas integrais são descritas por

$$y/x = c_1\,,\quad z/x = c_2\,,\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Assim temos como exemplos de soluções integrais

$$u(x,y,z) = z/x\,,\ yz/x\,,\ x/z\,,\ \sin(y/x)\,,\ \cos(z/x)^2\,.$$

A solução geral da equação vem então dada por

$$u(x,y,z) = f \circ \phi(x,y,z)\,,\ f \in \mathrm{C}^1$$

e $\phi(x,y,z) = (y/x, z/x)$. *c.q.d.*

2. Equações com derivadas parciais de primeira ordem

Comecemos por definir o objecto principal do nosso estudo.

Definição 2.1. Uma *equação com derivadas parciais de primeira ordem* nas variáveis independentes x, y, z, é uma relação da forma

$$G\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{5}$$

onde G é uma função de classe C^1 num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^5$, considerada nas variáveis x, y, z, p, q.

Uma *solução da equação com derivadas parciais*, de (5) é uma função $z = f(x,y)$ de classe C^1 que verifica:

(a) Para cada $(x,y) \in D$, $(x,y,z,p,q) \in \Omega$;
(b) $G\left(x, y, f(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$.

2.1. **Caso quasi-linear.** Vamos analisar agora um caso particular de (5).

Definição 2.2. Uma *equação com derivadas parciais* do tipo

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \tag{6}$$

é dita *quasi-linear.*

Note-se que neste caso a função G em (5) é linear nas variáveis p, q, i.e.

$$G(x,y,z,p,q) = P(x,y,z)p + Q(x,y,z)q - R(x,y,z)\,.$$

Exemplo 2.1.

(a) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$ – Caso não-linear.

(b) $a(z)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ – Caso linear.

(c) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$ – Equação de Euler.

(d) Seja g de classe C^1 com $\operatorname{grad} g \neq 0_{\mathbb{R}^3}$; então $g(x,y,z) = c$, define uma família de superfícies diferenciáveis.

As superfícies ortogonais $z = f(x,y)$ a cada elemento desta família de superfícies verifica a equação com derivadas parciais

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z}\,,$$

que é quasi-linear.

Teorema (Solução do caso quasi-linear). *Seja $u \in \mathrm{C}^1$ e suponhamos que em cada ponto da suerfície $u(x,y,z) = 0$ as seguintes condições se verificam:*

(a) *u verifica a equação* (6).

(b) $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$.

então $u(x,y,z) = 0$ define implicitamente z como função de x,y, i.e. $z = f(x,y)$ e esta função é solução de (6).

Sejam u_1, u_2 funções funcionalmente independentes de classe C^1 que verificam (a) e (b) do Teorema anterior, então a solução geral de (6) vem dada por $u_1(x,y,z) = f \circ u_2(x,y,z)$, onde $f \in \mathrm{C}^1$.

Problema 2.1. *Determine a solução geral de*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z\,.$$

Resolução. Para tal comecemos por determinar a solução geral do sistema de equações diferenciais

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{y} = \frac{\mathrm{d}\,z}{z}\,.$$

Vimos já (cf. problema 1.1) que a solução geral deste sistema vem dada por

$$y/x = c_1\,, \quad z/x = c_2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Assim, a solução geral da equação dada vem dada por $z = xf(y/x)$, $f \in \mathrm{C}^1$.

Problema 2.2. *Determine a solução geral de*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \quad u(0,x) = 1 + x^2\,.$$

Comecemos por determinar a solução geral do sistema de equções diferenciais

$$\frac{\mathrm{d}\,t}{1} = \frac{\mathrm{d}\,x}{-u} = \frac{\mathrm{d}\,u}{0}\,.$$

Assim, $u = c_1$ e $tu + x = c_2$ verificam estem sistema, pelo que a solução geral do nosso problema vem dada por

$$u(t,x) = f(tu(t,x) + x)\,, \quad f \in \mathrm{C}^1\ .$$

Mas $u(0,x) = 1 + x^2$, e portanto, $f(s) = s^2 + 1$, i.e. u está definida implicitamente pela equação $u(t,x) = 1 + (tu(t,x) + x)^2$, i.e.

$$u(t,x) = \frac{2(1+x^2)/t^2}{1 - 2tx + \sqrt{(1-2tx)^2 - 4(1+x^2)}}\,.$$

é a solução do nosso problema. *c.q.d.*

2.2. **Caso geral. Sistema de Charpit-Lagrange.** Toda a solução de classe C^1 da equação (5) é tal que

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\frac{\partial G}{\partial p}} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\frac{\partial G}{\partial q}} = \frac{\mathrm{d}\,z}{p\frac{\partial G}{\partial p} + q\frac{\partial G}{\partial q}} = \frac{\mathrm{d}\,p}{-(\frac{\partial G}{\partial x} + p\frac{\partial G}{\partial z})} = \frac{\mathrm{d}\,q}{-(\frac{\partial G}{\partial y} + q\frac{\partial G}{\partial z})} \tag{7}$$

O *sistema* de equações diferenciais (7) é dito de *Charpit-Lagrange*.

Problema 2.3. *Será que as soluções de* (5) *e* (7) *coincidem?*

Resolução. A resposta é negativa, pois

$$\frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\partial\,G}{\partial\,x}\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s} + \frac{\partial\,G}{\partial\,y}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s} + \frac{\partial\,G}{\partial\,z}\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,s} + \frac{\partial\,G}{\partial\,p}\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,s} + \frac{\partial\,G}{\partial\,q}\frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,s} = 0\,,$$

e portanto, $G(x,y,z,p,q) = c$ sobre qualquer solução de (7). *c.q.d.*

No entanto, a resposta será afirmativa para problemas de valor inicial.

Problema 2.4. *Determinar a solução geral da equação* $\left(\frac{\partial\,z}{\partial\,x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,z}{\partial\,y}\right)^2 = 1$.

Resolução. Neste caso $G(x,y,z,p,q) = p^2 + q^2 - 1$ e o sistema de Charpit-Lagrange associado vem dado por

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{2p} = \frac{\mathrm{d}\,y}{2q} = \frac{\mathrm{d}\,z}{2(p^2+q^2)} = \frac{\mathrm{d}\,p}{0} = \frac{\mathrm{d}\,q}{0}\,.$$

Assim, $p = c_1$ e $q = c_2$, i.e. $\frac{\partial\,z}{\partial\,x} = c_1$ e $\frac{\partial\,z}{\partial\,y} = c_2$. Daqui se conclui que $z(x,y) = c_1x + c_2y + c_3$ com $c_1^2 + c_2^2 = 1$. *c.q.d.*

2.3. **Teorema de Kowalewsky-Cauchy.** Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, t} = f(t,u)\,, \quad u(0) = u_0\,, \tag{8}$$

onde f é uma função analítica numa vizinhança do ponto $(0,u_0)$. Então, existe uma solução definida e analítica num intervalo contendo o ponto $t=0$.

Método (Kowalewsky-Cauchy para equações diferenciais).

$u(0) = u_0$ – Condição inicial

$u'(0) = f(0,u_0)$ – por (8)

$u''(0) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(0,u_0) + \dfrac{\partial f}{\partial u}(0,u_0)u'(0)$ – derivando em ordem a t, (8)

Procedendo desta forma obtemos

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}\,,$$

que é uma série uniformemente convergente numa vizinhança da origem.

Considere-se agora o *problema de Cauchy*

$$\frac{\partial\, u}{\partial\, t} = G\left(t,x,u,\frac{\partial\, u}{\partial\, x}\right)\,, \quad u(0,x) = \phi(x) \tag{9}$$

Método (Kowalewsky-Cauchy para equações com derivadas parciais).

$u(0,x) = \phi(x)$

$\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,x) = \phi^{(n)}(x)$

$\dfrac{\partial\, u}{\partial\, t}(0,x) = G(0,x,\phi(x),\phi'(x))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,x) = {} & \frac{\partial\, G}{\partial\, t}(0,x,\phi(x),\phi'(x)) + \frac{\partial\, G}{\partial\, z}(0,x,\phi(x),\phi'(x))\frac{\partial\, u}{\partial\, t}(0,x) \\ & + \frac{\partial\, G}{\partial\, p}(0,x,\phi(x),\phi'(x))\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}(0,x)\end{aligned}$$

Nesta última expressão somente necessitamos calcular $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}(0,x)$. Para tal temos somente de derivar em ordem a x a equação (9).

Procedendo desta forma obtemos

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(0,x)\frac{t^n}{n!}\,,$$

que é uma série uniformemente convergente numa vizinhança do ponto $(0,0)$.

Problema 2.5. *Determine pelo método de Kowalewsky-Cauchy uma aproximação para a solução geral do seguinte problema*

$$\frac{\partial\, u}{\partial\, t} - u\frac{\partial\, u}{\partial\, x} = 0\,, \quad u(0,x) = 1 + x^2\,.$$

Resolução. A função $G(t,x,z,p) = zp$ é analítica pelo que podemos aplicar o método de Kowalewsky-Cauchy. Assim, procuremos a solução na forma

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(0,x)\frac{t^n}{n!}\,.$$

Agora, $u(0,x) = 1 + x^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,x) = 2x$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,x) = 2x$ e $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,x) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Com estes dados podemos começar a calcular

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 2x(1+x^2)\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)\frac{\partial u}{\partial x}(0,x) + u(0,x)\frac{\partial u^2}{\partial x\,\partial t}(0,x)\,.$$

Como $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}(0,x) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,x)\right)^2 + u(0,x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,x)$, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 20x^4 + 6x^2 + 2\,.$$

Assim,

$$u(t,x) = 1 + x^2 + 2x(1+x^2)t + (20x^4 + 6x^2 + 2)\frac{t^2}{2!} + \dots\,.$$

Por este processo dificilmente obteríamos a solução exacta do problema que pode ser consultada no problema 2.2. *c.q.d.*

3. Equações com derivadas parciais de segunda ordem

Vamos estudar as *equações com derivadas parciais de segunda ordem*, i.e.

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\,, \tag{10}$$

onde a, b, c e G são funções de classe C^2 e não se anulam simultaneamente.

3.1. **Classificação.**

Verifiquemos que as equações do tipo (10) tomam formas mais simples e pré-definidas consoante o sinal do *discriminante da equação com derivadas parciais*

$$\Delta = b^2 - ac\,.$$

A estas formas desiganremos por *formas canónicas das equações com derivads parciais de segunda ordem.*

Isto vai ser conseguido por uma mudança de variável

$$\xi = \xi(x,y)\,, \quad \eta = \eta(x,y)\,, \quad \text{com} \quad \left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}\,.$$

Assim,

$$Du = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} & \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

e também

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Reescrevamos a equação (10) nas novas variáveis

$$a_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2b_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + c_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + G_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0\,, \tag{11}$$

onde

$$a_1 = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \tag{12}$$

$$b_1 = a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{13}$$

$$c_1 = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \tag{14}$$

Assim, o discriminante da equação (11) vem dado por

$$\Delta_1 = b_1^2 - a_1c_1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \Delta\,.$$

Acabámos de ver, que o sinal do discriminante, correspondente a uma equação com derivadas parciais de segunda ordem, não vem alterado por uma mudança de variável do tipo considerado.

Definição 3.1 (Classificação). Considere a equação com derivadas parciais de segunda ordem (10). Se $\Delta > 0$ (respectivamente, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$), $(x,y) \in D$ então dizemos que estamos em presença de uma *equação com derivadas parciais de segunda ordem hiperbólica em* D (respectivamente, *parabólica em* D ou *elíptica em* D).

Exemplo 3.1.

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ – *equação das ondas*
$\Delta = 0 - 1(-1) > 0$, i.e. é hiperbólica em $\mathbb{R}^2$.

(b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$ – *equação do calor*
$\Delta = 0 - 1.0 = 0$, i.e. é parabólica em $\mathbb{R}^2$.

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ – *equação de Laplace*
$\Delta = 0 - 1(1) < 0$, i.e. é elíptica em $\mathbb{R}^2$.

(d) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ – *equação de Tricomi*
$\Delta = -y$, i.e. é elíptica no semiplano $y > 0$ e hiperbólica no semiplano $y < 0$.

3.2. **Redução à forma canónica.** Do estudo apresentado na secção anterior vemos que tomando uma mudança de variável $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ soluções funcionalmente independentes da equação diferencial

$$ady^2 - 2bdxdy + cdx^2 = 0\,, \tag{15}$$

podemos simplificar o problema em análise.

Teorema 3.1. *Considere uma equação diferencial com derivadas parciais de segunda ordem. Se for hiperbólica (respectivamente, parabólica ou elíptica) num domínio D, então existe uma mudança de variável, constituida por soluções funcionalmente independentes de* (15) *que a leva à forma canónica*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + G_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

(respectivamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + G_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + G_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0\ ).$$

Problema 3.1. *Classifique e reduza à forma canónica as equações com derivadas parciais:*

(a) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

(b) $\sin^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

(a). Neste caso estamos em presença de uma equação hiperbólica, pois $\Delta = x^2y^2$. A mudança de variável está determinada pelas soluções da equação diferencial

$$x^2dy^2 - y^2dx^2 = 0\,, \quad \text{i.e.} \quad yx = c_1\,,\ y/x = c_2\,.$$

Assim $\xi(x, y) = xy$ e $\eta(x, y) = y/x$. Agora tendo em atenção as equações (12), (13) e (14), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0\,,$$

como forma canónica da equação com derivadas parciais dada. *c.q.d.*

(b). Neste caso estamos em presença de uma equação parabólica, pois $\Delta = 0$. A mudança de variável está determinada pelas soluções da equação diferencial

$$\sin^2 x dy^2 + 2y \sin x dx dy + y^2dx^2 = 0\,, \quad \text{i.e.} \quad y\tan(x/2) = c_1\,,\ y = c_2\,.$$

Assim $\xi(x, y) = y\tan(x/2)$ e $\eta(x, y) = y$. Agora tendo em atenção as equações (12), (13) e (14), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0\,,$$

como forma canónica da equação com derivadas parciais dada. *c.q.d.*

(c). Neste caso estamos em presença de uma equação elíptica, pois $\Delta = -1$. A mudança de variável está determinada pelas soluções da equação diferencial

$$dy^2 + 2dxdy + 2dx^2 = 0\,, \quad \text{i.e.} \quad y + x + ix = c_1\,,\ y + x - ix = c_2\,.$$

Somando algebricamente as duas equações obtemos $y + x = c_3$, com $c_3 \in \mathbb{C}$. Por outro lado somando algebricamente as equações dadas depois de multiplicadas por i a primeira e por $-i$ a segunda obtemos $x = c_4$, com $c_4 \in \mathbb{C}$. Assim $\xi(x,y) = x+y$ e $\eta(x,y) = x$. Agora tendo em atenção as equações (12), (13) e (14), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0\,,$$

como forma canónica da equação com derivadas parciais dada. *c.q.d.*

3.3. **Principio da sobreposição.** Seja P um *operador linear com derivadas parciais* sobre o espaço das funções de classe C^m do tipo

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{P}(x, \mathrm{D}) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\, \mathrm{D}^\alpha\,, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\,, \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,, \quad \text{i.e.}$$

$\mathrm{P}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1\, \mathrm{P}(u_1) + c_2\, \mathrm{P}(u_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $u_1, u_2 \in \mathrm{C}^m$.

Teorema (Principio da Sobreposição). *Seja* P *um operador linear com derivadas parciais do tipo* (16).

(1) *Sejam* $\{u_k\}$ *uma sucessão de funções que verificam* $\mathrm{P}\, u_k = 0$ *e* $(c_k) \subset \mathbb{C}$. *Se* $\sum c_k u_k$ *é uniformemente convergente, então a função* $u = \sum c_k u_k$ *é ainda uma solução da equação com derivadas parciais* $\mathrm{P} \equiv 0$, *i.e.* $\mathrm{P}\, u = 0$.

(2) *Seja* $u(x, \lambda)$ *uma família a um parâmetro* λ *solução de* $\mathrm{P} \equiv 0$. *Considere-se o integral paramétrico uniformemente convergente* $\int g(\lambda) u(x, \lambda)\, \mathrm{d}\,\lambda$. *Então a função* $u(x) = \int g(\lambda) u(x, \lambda)\, \mathrm{d}\,\lambda$ *é ainda uma solução de* $\mathrm{P} \equiv 0$ *se*

$$\mathrm{P}\, u = \mathrm{P}\left(\int g(\lambda) u(x, \lambda)\, \mathrm{d}\,\lambda \right) = \int g(\lambda)\, \mathrm{P}\, u\, \mathrm{d}\,\lambda\,.$$

(3) *Nas condições do segundo principio suponhamos que* $v(x, \lambda, h) = (u(x, \lambda + h) - u(x, \lambda))/h$, $h \neq 0$ *e* $\lim_{h \to 0} v(x, \lambda, h) = \dfrac{\partial u}{\partial \lambda}$. *Então a função* $v_1 = \dfrac{\partial u}{\partial \lambda}$ *é ainda uma solução de* $\mathrm{P} \equiv 0$ *se* $\mathrm{P}\, v_1 = \mathrm{P}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \lambda} \right) = \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\, \mathrm{P}(u(x, \lambda))$.

Observação . Este principio está na base da aplicação do cálculo operacional para a resolução de equações com derivadas parciais lineares.

3.4. **Cálculo operacional.** Vamos aplicar transformadas de Laplace para a resolução de equações com derivadas parciais do tipo

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial u}{\partial x} + Cu + A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B_1\frac{\partial u}{\partial t} = 0\,, \tag{17}$$

onde A, A_1, B, B_1, C são funções contínuas de x definidas no intervalo $[0, l]$. O nosso objectivo vai ser o de determinar uma solução da equação (17) que verifique as seguintes *condições inciais*

$$u(x,0) = \phi(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)\,, \quad x \in [0,l]\,,\ t \geq 0\,,$$

e *condições de fronteira*

$$u(0,t) = f(t)\,, \quad \alpha\frac{\partial u}{\partial x}(0,l) + \beta\frac{\partial u}{\partial t}(l,t) = \gamma u(l,t)\,,$$

onde α, β, γ são constantes.

Observação . A segunda condição de fronteira é desnecessária no caso em que $l \to \infty$.

Das propriedades das transformadas de Laplace sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}u(x,s) = \bar{u}(s) &= \int_0^\infty \exp(-st)u(x,t)\ \mathrm{d}\,t \\
\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}}{\mathrm{d}\,x} &= \int_0^\infty \exp(-st)\frac{\partial u}{\partial x}\ \mathrm{d}\,t \\
\frac{\mathrm{d}^2\,\bar{u}}{\mathrm{d}\,x^2} &= \int_0^\infty \exp(-st)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \mathrm{d}\,t\,.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\frac{\partial u}{\partial t} &= s\bar{u} - u(x,0) \\
\mathfrak{L}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= s^2\bar{u} - s\phi(x) - \psi(x)\,.
\end{aligned}$$

Assim, a equação (17) toma a forma

$$A\frac{\mathrm{d}^2\,\bar{u}}{\mathrm{d}\,x^2} + B\frac{\mathrm{d}\,\bar{u}}{\mathrm{d}\,x} + M\bar{u} + N = 0\,, \tag{18}$$

onde $M = C - A_1 s^2 + B_1 s$, $N = -A_1 s\phi - A_1\psi - B_1\phi$, que é uma equação diferencial linear de segunda ordem. A solução geral de (17) vem dada como a transformada inversa da solução de (18).

Problema 3.2. *Resolva a seguinte equação com derivadas parciais*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,, \quad u(x,0) = A\sin(\pi x/l)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, \quad u(0,t) = u(l,t) = 0\,.$$

Resolução. Aplicando transformadas de Laplace obtemos

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\bar{u}}{\mathrm{d}\,x^2} - \frac{s^2}{a^2}\bar{u} = -\frac{sA}{a^2}\sin(\pi x/l)\,, \quad \bar{u}(0,s) = \bar{u}(l,s) = 0\,. \tag{19}$$

A solução geral da equação homogénea associada vem dada por

$$\bar{u}_h(x,s) = C_1\exp(s/ax) + C_2\exp(-s/ax)\,, \quad C_1\,,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Pode também ver-se que uma solução particular da equação (19) é

$$\bar{u}_p(x,s) = \frac{sA}{s^2 + a^2\pi^2/l^2}\sin(\pi x/l)\,.$$

Assim a solução geral de (18) vem dada por $\bar{u} = \bar{u}_h + \bar{u}_p$, i.e.

$$\bar{u}(x,s) = C_1\exp(s/ax) + C_2\exp(-s/ax) + \frac{sA}{s^2 + a^2\pi^2/l^2}\sin(\pi x/l)\,,$$

e tendo em atenção as condições de fronteira

$$\bar{u}(x,s) = \frac{sA}{s^2 + a^2\pi^2/l^2}\sin(\pi x/l)\,.$$

Aplicando agora transformada inversa de Laplace obtemos

$$u(x,t) = A\cos(\pi at/l)\sin(\pi x/l)\,,$$

para solução do problema inicial. *c.q.d.*

ÍNDICE REMISSIVO