Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Teoria Construtiva da Aproximação
Exame — 26/6/2000
Duração: 3h

(7.0) 1. Polinómios Ortogonais.

Faça uma exposição sobre o tema de polinómios ortogonais dando particular atenção às propriedades algébricas e assimptóticas, e às aplicações à aproximação de funções tipo Markov.

(3.0) 2. Teoria Qualitativa da Aproximação.

(a) Diga em que condições é válida a fórmula integral de Cauchy.

(b) Comente:
Os aproximantes racionais são os aproximantes naturais das funções analíticas.

(c) Quando é que podemos garantir que o espaço dos polinómios é denso no espaço das funções analíticas com a norma uniforme.

(4.0) 3. Aproximação Polinomial.

(a) Enuncie o teorma de aproximação de Weierstrass.

(b) Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Dê uma condição necessária e suficiente para que um polinómio p^* seja uma melhor aproximação em norma infinita de f no espaço dos polinómios de grau menor do que o igual a n.

(c) Mostre que se p_n for uma melhor aproximação de grau n de f ela é única.

(d) Mostre que, se o polinómio p_n de grau n é a melhor aproximação de grau n para x^{n+1} em $[-1\,,\,1]$, então

$$x^{n+1} - p_n(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x) \text{ onde } \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,,$$

para $n = 0, 1, \ldots$
Indique também o valor do erro, $E_n(x^{n+1}\,;\,[-1\,,\,1])$, cometido com esta aproximação.

---

v.s.f.f

(6.0) 4. Aproximantes de Padé.

(a) Defina aproximante de Padé de ordem $(n\,,\,m)$, $\pi_{n,m}$, de uma função analítica numa vizinhança da origem.

(b) Indique um aproximante racional de ordem (n, m) para a função $\sqrt{1+z}$ e determine a região de convergência uniforme. Compare com o resultado obtido a partir da série de Taylor para essa função.

(c) Calcule a diagonal da tabela de Padé para a função $\exp(z)$.

(d) Aproveite o resultado obtido na alínea anterior para calcular $\Pi_{3,3}(1)$. Compare este resultado com o obtido a partir do polinómio de Taylor.

(e) Enuncie o Teorema de Montessus de Ballore.

(f) Justifique que os pólos, α_n, dos elementos da segunda fila da tabela de Padé de $\exp(z)$ verificam $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$.