Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Teoria Construtiva da Aproximação

Exame — 23/6/99

Duração: 3h

(4.0) 1. Fracções Contínuas.

Faça uma exposição sobre o tema das fracções contínuas dando particular antenção às relações de recorrência, representações por determinantes, resultados de convergência, relações com séries numéricas e de potências e alguma aplicação destes resultados.

(5.0) 2. Caracterização da Melhor Aproximação.

(a) Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$. Dê uma condição necessária e suficiente para que um polinómio p^* seja uma melhor aproximação em norma infinita de f no espaço dos polinómios de grau menor do que o igual a n.

(b) Mostre que se p_n for uma melhor aproximação de grau n de f ela é única.

(c) Mostre que, se o polinómio p_n de grau n é a melhor aproximação de grau n para x^{n+1} em $[-1\,,\,1]$, então

$$x^{n+1} - p_n(x) = 2^n T_{n+1}(x) \;\text{ onde }\quad T_n(x) = \cos(n \arccos x)\,,$$

para $n = 0, 1, \ldots$

Indique também o valor do erro, $E_n(x^{n+1}\,;\,[-1\,,\,1])$, cometido com esta aproximação.

(d) Mostre que, se existirem um polinómio q_n de grau n e um conjunto de $n+2$ pontos, $\{x_1\,, \ldots\,, x_{n+2}\} \subset [a, b]$ com $x_j < x_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$ tais que

$$f(x_j) - q_n(x_j) = (-1)^j \xi_j\,, \quad j = 1, \ldots, n+2\,,$$

e todos os ξ_j têm o mesmo sinal, então

$$E_n(f\,;\,[a\,,\,b]) \geq \eta = \min\{|\xi_1|\,, \ldots\,, |\xi_{n+2}|\}\,.$$

Indicação: Suponha que se não tem a última condição do teorema para algum polinómio de grau n, p_n, i.e. para $x \in [a\,,\,b]$

$$|f(x) - p_n(x)| < |f(x_j) - q_n(x_j)|\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n+2\,,$$

e mostre que os polinómios $p_n\,,\, q_n$ coincidem.

(4.0) 3. Aproximantes de Padé.

(a) Dê uma definição de função meromorfa em $\mathbb{C}$.

(b) Defina aproximante de Padé de ordem $(n\,,\,m)$, $\pi_{n,m}$, de uma função analítica numa vizinhança da origem.

(c) Explique como procederia para calcular a terceira linha da tabela de Padé de f, $\pi_{n,2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(4.0) 4. Teorema dos Blocos.

(a) Decomponha $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-3)}$ em fracções elementares.

(b) Sabendo que $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$, mostre que o desenvolvimento em série de potências numa vizinhaça da origem, da função f apresentada na alínea anterior é

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n\,, \quad f_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Indique também a região de convergência desta representação em série.

(c) Mostre que a sucessão (f_n) verifica a seguinte relação de recorrência da coeficientes constantes

$$f_{n+2} = 5f_{n+1} - 6f_n\,, \quad n = 0, 1, \ldots \text{ e } \quad f_0 = 0\,,\ f_1 = 1/6\,.$$

(d) Tendo em atenção o resultado da alínea anterior determine os elementos da terceira fila da tabela de Padé $\pi_{n,2}$.

(e) Mostre que os pólos dos elementos $\pi_{n,1}$, formam uma sucessão convergente para 2.

(3.0) 5. Teorema de Montessus de Ballore.

(a) Classifique a função tangente quanto às suas singularidades em $\mathbb{C}$.

(b) Enuncie o Teorema de Montessus de Ballore.

(c) Aplique o Teorema de Montessus de Ballore para determinar o disco de convergência dos elementos da linha $2m$ da Tabela de Padé.

(d) Justifique que os pólos, α_n, dos elementos da segunda fila da tabela de Padé de $\exp(z)$ verificam $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$.
