Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica - Engenharias Mecânica e de Materiais

Exame - Duração: 2h30m 19-06-2002

- **NOTA**: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Pretende determinar-se a única raiz x^* de $f(x) = 0$, em $[a, b]$, usando o método do ponto fixo.

   (a) Sendo g a função de iteração do método, mostre que, se $|g'(x)| \leq K < 1$, $x \in [a, b]$, então, para qualquer $x_0 \in [a, b]$, se tem

   $$|x_k - x^*| \leq K^k \max\{x_0 - a, b - x_0\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

   (b) Considere $f(x) = e^x - 4x$, com $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

   i. Mostre que $f(x)$ tem uma única raiz no intervalo dado.

   ii. Escolha uma de entre as seguintes reformulações do problema $f(x) = 0$, por forma a garantir a convergência do método do ponto fixo: $x = \dfrac{e^x}{4}$ ou $x = \ln(4x)$.

   iii. Quantas iterações do método do ponto fixo, usando a função g escolhida na alínea anterior, são necessárias para garantir um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-5}?

2. Considere o sistema linear

   $$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ \alpha & -4 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determine um intervalo de valores de α que garantem a convergência do método de *Jacobi*

   $$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ sendo } A = D - L - U,$$

   quando aplicado a este sistema.

   (b) Considerando $\alpha = 2$, efectue duas iterações do referido método, indicando uma estimativa para o erro cometido.

3. Na realização do controlo da qualidade da produção de uma unidade industrial, são utilizadas máquinas de medição de coordenadas. No processo de calibração periódica de uma máquina desse tipo, torna-se necessário saber a posição (em cm) e a velocidade (em cm/s) das suas três partes móveis. No estudo do movimento do pórtico da máquina, por meio de interferómetros *laser*, registaram-se os seguintes valores, em função do tempo t (em s):

tempo t	10	20
posição p	50	102
velocidade v	5	4.5

   (a) Usando o polinómio interpolador de *Hermite*, preveja a posição da peça móvel, bem como a sua velocidade, quando $t = 15$ s.

   (b) Qual a velocidade máxima que o pórtico atinge?

   (c) Sabendo que, no instante $t = 10$ s, a aceleração do pórtico vale $a = 0.03$ cm/s^2, reescreva o polinómio interpolador considerado em (a), por forma a incluir essa informação.

4. Determine o valor aproximado de

$$I = \int_0^1 e^x \cos x dx,$$

com duas casas decimais correctas, usando a regra dos trapézios

$$I(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] - \frac{h^2}{12}(b-a) f''(\xi), \; \xi \in (a,b).$$

5. Pretende resolver-se o problema de condição inicial

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & -3y + 99e^{-t} \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right., \quad t \in [0,1],$$

usando o método de *Euler* implícito

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}).$$

   (a) Mostre que o problema é bem posto.

   (b) Deduza a ordem e o erro de truncatura local do método numérico e conclua a sua convergência.

   (c) Obtenha o valor aproximado de $y(1)$, usando o referido método, com $h = 0.5$.

6. Pretende determinar-se uma solução aproximada para o problema com condições de fronteira

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y'' + (2-x)y & = & x^2, \quad x \in (0,1), \\ y(0) = 0 & , & y(1) = 1, \end{array}\right.$$

nos pontos $x_1 = \frac{1}{3}$ e $x_2 = \frac{2}{3}$. Considere $x_0 = 0$ e $x_3 = 1$.

   (a) Mostre que

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left[y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_{i-1}, x_{i+1}),$$

   com $h = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, 3$.

   (b) Determine a aproximação pretendida, usando um método de diferenças finitas.