Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica - Engenharias Mecânica e de Materiais

Exame de Recurso - Duração: 2h30m 15-07-2002

- **NOTA**: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Pretende determinar-se a única raiz x^* de $f(x) = 0$, em $[a, b]$, usando o método de *Newton*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

   (a) Diga quais as condições que permitem garantir a convergência do referido método.

   (b) Supondo verificadas as condições de convergência do método, mostre que

$$|x^* - x_{k+1}| \leq M |x^* - x_k|^2, \quad \text{com} \quad M = \frac{1}{2} \frac{\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}{\min_{x\in[a,b]} |f'(x)|}.$$

   (c) Use o método de *Newton* duas vezes para aproximar a solução da equação $(x-2)^2 - \ln x = 0$, com $x \in [1, 2]$.

2. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 &= -3 \\ x_1 + \alpha x_2 &= 0 \end{cases},$$

onde α é um parâmetro real negativo.

   (a) Determine todos os valores de α que garantem a convergência do método de *Jacobi*

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \text{ sendo } A = D - L - U,$$

   quando aplicado a este sistema.

   (b) Considerando $\alpha = -1$, efectue duas iterações do referido método, indicando uma estimativa para o erro cometido.

3. Seja f uma função real de variável real, conhecida nos pontos $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2$.

   (a) Mostre que

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x) f(x_i), \quad \text{com } l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

   é o único polinómio, de grau menor ou igual a dois, interpolador de f nos pontos dados.

   (b) A lei de *Ohm* diz que a tensão V nas extremidades de uma resistência percorrida por uma corrente eléctrica com intensidade I é directamente proporcional a essa intensidade de corrente. Isso só é verdade para resistências ideais; as resistências reais apresentam comportamentos menos lineares. Na tabela seguinte apresentam-se os resultados para uma resistência concreta:

I	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0
V	-193	-41	0	41	193

   Atendendo ao comportamento simétrico relativamente à origem, determine o polinómio segmentado quadrático interpolador da função dada na tabela.

4. Determine o valor aproximado de

$$\int_4^6 xe^{-x}dx,$$

com um erro inferior a 10^{-6}, usando a regra de *Simpson*

$$\begin{aligned}
I(f) &= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]+E_S(f)\,,\ n \text{ par},\\
E_S(f) &= -\frac{h^4}{180}(b-a)\,f^{(4)}(\xi)\,,\ \ \xi\in(a,b)\,.
\end{aligned}$$

5. Considere o problema de condição inicial $y' = -y\cos t$, $y(0)=1$, com $t\in[0,1]$.

   (a) Mostre que $y(t) = e^{-\sin t}$ é a solução exacta deste problema.

   (b) Determine a solução aproximada deste problema em $t = 1.0$, usando $h = 0.5$ e

      i. o método de *Euler*

      $$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)\,;$$

      ii. o método de *Runge-Kutta* de segunda ordem

      $$\begin{aligned}
      k_1 &= f(t_i, y_i)\,,\quad k_2 = f(t_i+h, y_i+hk_1)\,,\\
      y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(k_1+k_2)\,.
      \end{aligned}$$

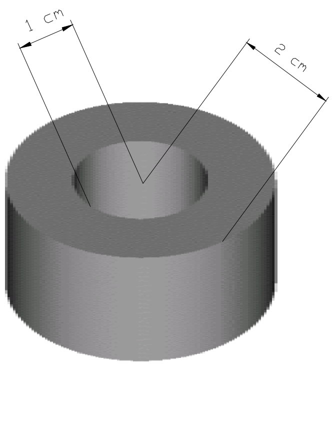
      Compare os resultados que obteve com a solução exacta em $t = 1.0$.

   (c) Determine a ordem e o erro de truncatura do método de *Euler*.

6. No interior de uma conduta cilíndrica circula um fluído a alta temperatura. Visto que a pressão exercida pelo fluído é bastante elevada, as paredes da conduta não poderão ter uma espessura muito reduzida. Para esta situação, a equação diferencial que representa a temperatura u (em *graus Celsius*), na parede metálica em função da distância radial r (em *cm*) ao eixo do cilindro é

   $$ru'' + u' = 0.$$

   Considerando uma conduta com raio interior de 1 *cm* e raio exterior de 2 *cm*, conforme a figura, determine um valor aproximado para $u\left(\frac{4}{3}\right)$ e para $u\left(\frac{5}{3}\right)$, supondo que a temperatura do fluído é de 540^oC e a temperatura da parede exterior é de 20^oC.



Fórmulas de diferenças finitas:

$$\begin{aligned}
u'(r_i) &= \frac{1}{2h}\left[u(r_{i+1})-u(r_{i-1})\right]-\frac{h^2}{6}u'''(\xi_1)\,,\quad \xi_1\in(r_{i-1},r_{i+1})\,;\\
u''(r_i) &= \frac{1}{h^2}\left[u(r_{i-1})-2u(r_i)+u(r_{i+1})\right]-\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_2)\,,\quad \xi_2\in(r_{i-1},r_{i+1})\,.
\end{aligned}$$