Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Mecânica e Engenharia dos Materiais

Ano lectivo 2001/2002 Folha 1

1. Use o método da bissecção para aproximar a solução, com erro inferior a 10^{-2}, da equação $x + 0.5 + 2\cos(\pi x) = 0$ no intervalo $[0.5, 1.0]$.

2. Determine o número de iterações necessárias para aproximar, pelo método da bissecção e com uma precisão de 10^{-1}, a solução de $x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1, 2]$. Determine tal aproximação com a precisão indicada.

3. Localize graficamente as raízes das equações seguintes e determine um valor aproximado de uma delas, com uma casa decimal correcta, utilizando o método da bissecção:
   (a) $\ln x = 3 - \dfrac{3}{2}x$; (b) $|x| - e^{x-1} = 0$.

4. A componente forçada de uma tensão transitória para um dado circuito pode ser traduzida pela expressão:
$$\mathcal{E}(t) = e^{-0.06\pi t}\sin(2t - \pi).$$
   Usando o método da bissecção duas vezes, determine a tensão máxima deste circuito.

5. Pretende construir-se um tanque cúbico com a capacidade de 25000 *litros*. Calcule uma aproximação para o comprimento do lado do tanque usando o método da bissecção quatro vezes e indique a precisão do resultado.

6. Considere a função $f(x) = \ln(4 - x^2) - x$.
   (a) Faça a localização gráfica das raízes reais de $f(x) = 0$.
   (b) Utilizando o método de Newton aproxime, verificando as condições de convergência, o valor da maior raiz real da equação real $f(x) = 0$, com um erro não superior a 10^{-2}.
   (c) Repita as duas alíneas anteriores considerando, em vez de f, as funções definidas por $g(x) = x - \sin x$, $h(x) = \operatorname{tg} x - \cos x - 0.5$ e $i(x) = x\cos x - e^x$.

7. Considere a função f definida por $f(x) = e^{-x}\ln x$, $x > 0$. Utilizando o método de Newton, aproxime a abcissa do seu ponto de inflexão, em segunda aproximação, partindo de um intervalo com amplitude inferior ou igual a 1. Indique uma estimativa para o erro cometido.

8. Pretende calcular-se a área limitada superiormente pela recta que passa pelos pontos de coordenadas $(e, 1)$ e $(0, 2)$ e inferiormente pela curva $y = |\ln x|$.
   (a) Determine um intervalo, de amplitude não superior a 1, que contenha a menor abcissa dos pontos de intersecção das referidas curvas.
   (b) Calcule um valor aproximado, pelo método de Newton e em quarta aproximação, do limite inferior do intervalo de integração necessário para calcular aquela área.

9. (a) Localize graficamente a raiz real positiva, r, da equação $e^x + 2x^2 - 2 = 0$.
   (b) Obtenha um valor aproximado de r aplicando o método de Newton duas vezes.

10. Aplicando o método de Newton, derive um processo iterativo para aproximar o inverso de um número $c \neq 0$.

11. Use o método de Newton para aproximar, com erro inferior a 10^{-4}, o valor de x correspondente ao ponto do gráfico de $y = x^2$ mais próximo de $(1, 0)$.

12. Determine a distância mínima, na vertical, entre as curvas definidas por $y = e^x$ e $y = \ln(x)$.

13. Num escoamento com superfície livre pode definir-se uma camada junto ao fundo (designada por camada limite) onde as características do escoamento são significativamente diferentes das que se verificam acima dessa camada. Pode provar-se que a espessura da camada limite é $\delta = 5z$, sendo z, para um escoamento com determinadas características, dado por

$$|z| \log_{10} |75z| = 2.$$

   (a) Localize graficamente as raízes reais desta equação.

   (b) Determine a segunda aproximação dada pelo método de Newton para a espessura da camada limite, δ.

   (c) Indique um limite superior para o erro cometido na aproximação obtida na alínea anterior.

14. Mostre que $x = \frac{1}{2}\cos x$ tem uma solução α. Obtenha, em seguida, um intervalo $[a, b]$ que contenha a referida raiz e tal que para todo o x_0 nesse intervalo a sucessão $x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, convirja para α. Justifique.

15. Determine os extremos locais da função $f(x) = \frac{x^3}{3} + 10\sin x$, com um erro inferior a 10^{-4}, usando o método iterativo do ponto fixo.

16. Determine uma aproximação para a maior raiz de $e^x - 4x^2 = 0$, usando o método do ponto fixo. Indique um majorante do erro da aproximação obtida.

17. Mostre que o método iterativo

$$x_{r+1} = \frac{c}{x_r^{p-1}}$$

não é útil para aproximar a raiz de índice p ($p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$) de um número positivo c.

18. Considere a região do plano definida por

$$4x^2 + 9y^2 \leq 36 \quad \wedge \quad y + 1 \geq x^2.$$

   (a) Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha a maior abcissa, r, dos pontos de intersecção das curvas que limitam esta região.

   (b) Calcule um valor aproximado de r, com uma casa decimal correcta, usando o método de Newton.

   (c) Indique o integral que lhe permite calcular a área da região acima definida.

   (d) Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região indicada, em torno do eixo dos yy.

19. Para determinar a queda de pressão em escoamentos de líquidos em tubos cilíndricos, torna-se necessário obter o chamado factor de atrito f que é dado pela relação empírica

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{k}\ln\left(Re\sqrt{f}\right) + \left(14 - \frac{5.6}{k}\right),$$

em que k é a rugosidade e Re o número (adimensional) de Reynolds do escoamento. Para um valor de $k = 0.28$ e número de Reynolds $Re = 3750$, determine o valor de f.

20. A equação de Kepler, usada para calcular as órbitas dos satélites, é

$$M = x - E\sin x.$$

Dado $E = 0.2$, resolva a equação para $M = 0.5$ e $M = 0.8$ com quatro casas decimais correctas.

21. DeSantis (1976) deduziu uma relação para o factor de compressibilidade dos gases reais da forma

$$z = \frac{1 + y + y^2 - y^3}{(1 - y)^3},$$

onde $y = \frac{b}{4v}$, sendo b a correcção de van der Waals e v o volume molar. Se $z = 0.892$, qual o valor de y?