Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Mecânica e Engenharia dos Materiais

Ano lectivo 2001/2002 Folha 2

1. Considere a equação $x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 2x^3 - kx^2 + mx - n = 0$.
   (a) Determine m, n e k de modo a que esta equação admita 1 como raiz tripla.
   (b) Localize e separe as raízes.
   (c) Determine, pelo método mais conveniente, a menor raiz da equação.

2. Considere o polinómio $P(x) = 3.1x^2 - 9.3 + x^3 - 3x$.
   (a) Utilize a regra dos sinais de Descartes e diga quantas são as raízes reais positivas.
   (b) Determine um intervalo que contenha todas as suas raízes reais.
   (c) Faça a separação das raízes reais do polinómio.
   (d) Determine uma aproximação para a maior das raízes reais, aplicando o método de Newton duas vezes.

3. Considere a equação polinomial $x^3 + kx^2 + 2x - 1 = 0$, com $k \geq 0$.
   (a) Determine o conjunto de todos os valores de k para os quais a equação tem uma única raiz no intervalo $[0, 1]$.
   (b) Tome para k o menor valor inteiro positivo do conjunto obtido na alínea anterior e faça a separação completa das raízes da equação dada.
   (c) Aproxime a menor raiz real daquela equação pelo método de Newton.

4. Localize e separe os valores próprios reais da matriz $A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$, sabendo que a sua equação característica é $\lambda^3 - 0.4\lambda^2 + 0.06\lambda - 0.004 = 0$.

5. Para resolver o sistema de equações diferenciais de segunda ordem $\begin{cases} x'' + x + 2y' + y = f(t) \\ x'' - x + y = g(t) \end{cases}$, com $x(0) = x'(0) = y(0) = 0$, pelo método das transformadas de Laplace, torna-se necessário factorizar a expressão $\left(S^2 + 1\right) S - (2S + 1)\left(S^2 - 1\right) = -S^3 - S^2 + 3S + 1$, por forma a obter a transformação inversa. Quais são os referidos factores?

6. Os polinómioss de *Chebyshev* constituem um conjunto de polinómios pertencentes a uma classe denominada de *polinómios ortogonais*. Determine os zeros dos seguintes polinómios de Chebyshev:
   (a) $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$;
   (b) $T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$.

7. Pretende construir-se um depósito semi-esférico, de raio r, para armazenar um líquido até uma altura h. Sabendo que o volume do referido líquido é dado pela expressão

$$V = \frac{\pi\left(2r^3 - 3r^2h + h^3\right)}{3},$$

   qual o raio com que se deve construir o depósito se se pretender guardar no máximo 250 *litros* de líquido a uma altura de 2 *metros*?

8. Pretende construir-se uma ponte entre duas margens de um rio que, por razões económicas, seja o mais curta possível. Sabendo que, na região onde se pretende construir a ponte, as margens do rio têm a forma das curvas $y = e^x$ e $y = \ln(x)$, determine o comprimento da ponte.

9. Um corpo de massa 1 kg, que se move apenas ao longo de uma linha recta e que inicialmente se encontra em repouso no ponto de coordenadas $x = 2$, fica sujeito a uma força cuja intensidade em cada instante t é dada por $F(t) = -1 + 2t - 3t^2$. Localize e separe os instantes de tempo em que o corpo passa pela origem do referencial.

10. Prove que as seguintes funções são normas em $I\!R^n$.

    (a) Norma 1:

    $$\forall x \in I\!R^n, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

    (b) Norma 2 ou norma euclidiana:

    $$\forall x \in I\!R^n, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}.$$

    (c) Norma infinito, norma máxima ou norma de Chebyshev:

    $$\forall x \in I\!R^n, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

11. O sistema $\begin{cases} -x(x+2) + 2y = 7 \\ x^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases}$ tem duas soluções. Localize-as graficamente e determine uma aproximação da solução de maior abcissa usando o método de Newton e iterando duas vezes.

12. Considere o sistema $\begin{cases} x^2 - y - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$. Utilize o método de Newton e o método de Newton modificado para determinar a sua solução (x, y) com abcissa positiva, em duas iterações.

13. O seguinte sistema não linear

    $$\begin{cases} 5x^2 - y^2 & = & 0, \\ y - \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) & = & 0 \end{cases}$$

    tem uma solução próxima de $[0.25, 0.25]^{\mathrm{T}}$. Aplique o algoritmo de Newton para aproximar a solução em duas iterações.

14. O sistema

    $$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 3 & = & 0, \\ x(6-x) + y - 9 & = & 0 \end{cases}$$

    tem duas soluções, uma das quais é $[x, y]^{\mathrm{T}} = [3, 0]^{\mathrm{T}}$. Determine a outra solução do sistema, usando o método de Newton em segunda aproximação, indicando uma estimativa para o erro cometido, com a norma de Chebyshev.

15. O sistema

    $$\begin{cases} x + 3\ln|x| - y^2 & = & 0, \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 & = & 0 \end{cases}$$

    tem várias soluções. Começando com a aproximação inicial $[x^{[0]}, y^{[0]}]^{\mathrm{T}} = [2, 2]^{\mathrm{T}}$, determine o resultados obtido pelo método de Newton ao fim de três iterações.

16. Considere o sistema $\begin{cases} x + y^3 - 5y^2 - 2y & = & 10, \\ x + y^3 + y^2 - 14y & = & 29. \end{cases}$

    (a) Use o método de Newton para calcular a solução do sistema com aproximação inicial $x^{[0]} = 1.5$ e $y^{[0]} = -2$.

    (b) Calcule a solução do sistema explicitando x na primeira equação e substituindo na segunda.