Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Mecânica e Engenharia dos Materiais

Ano lectivo 2001/2002 Folha 3

1. Aplicando o método de Jacobi, determine uma aproximação da solução do seguinte sistema
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$
começando com uma aproximação inicial $x^{(0)} = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$.

2. Dado o sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -8x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 5y & + & z & = & 16 \\ x & + & y & - & 4z & = & 7 \end{array} \right.$, partindo do vector inicial $x^{(0)} = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$, obtenha duas aproximações para a sua solução, usando:

   (a) o método iterativo de Jacobi;

   (b) o método iterativo de Gauss-Seidel.

   Compare as aproximações obtidas com a solução do sistema.

3. Para aproximar a solução (x_1, x_2, x_3) de um sistema linear $Ax = b$, recorreu-se ao seguinte método
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^{(k+1)} & = & -0.6x_2^{(k)} - 0.6x_3^{(k)} + 1 \\ x_2^{(k+1)} & = & -0.6x_1^{(k)} - 0.6x_3^{(k)} + 1 \\ x_3^{(k+1)} & = & -0.6x_1^{(k)} - 0.6x_2^{(k)} + 1 \end{array} \right. , \quad k = 0, 1, \ldots$$

   (a) Escreva a matriz de iteração M de tal método. O método será convergente?

   (b) O método apresentado pode ser identificado com o método de Jacobi ou com o método de Gauss-Seidel? Justifique a sua resposta.

   (c) Sabendo que $b = [1\ 1\ 1]^{\mathrm{T}}$, obtenha a matriz A do sistema inicial.

4. Considere o sistema linear $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 0.5z & = & 4 \end{array} \right.$.

   (a) Determine os valores do parâmetro k para os quais o sistema tem uma só solução.

   (b) Para $k = 0$ poderá aplicar o método de Gauss-Seidel sem alterar o sistema? Justifique.

   (c) Determine valores de k para os quais seja garantida a convergência do método de Jacobi.

   (d) Calcule duas aproximações para a solução do sistema, utilizando o método de Jacobi, com $k = 0$.

5. Considere o sistema linear $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & -1 \\ & & 2y & + & az & = & 0 \\ -x & & & + & 2z & = & 3 \end{array} \right.$, com $a < 0$.

   (a) Determine todos os valores do parâmetro a que garantem a convergência do método de Gauss-Seidel quando aplicado a este sistema.

   (b) Para $a = -1$ efectue duas iterações do referido método, indicando uma estimativa para o erro cometido.

6. Considere o seguinte sistema $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -2 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$.

   (a) Verifique que o método de Gauss-Seidel aplicado ao sistema diverge.

(b) Reordene as equações de modo a obter um sistema equivalente que lhe permita garantir que este método converge.

7. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Prove que o polinómio característico associado à matriz de iteração do método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior, é $P(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{46}{75}\lambda^2 - \frac{2}{25}\lambda$.

(b) Localize e separe as raízes de $P(\lambda) = 0$.

(c) O método de Gauss-Seidel, aplicado ao sistema anterior, é convergente? Justifique.

(d) Determine a segunda aproximação gerada pelo método de Gauss-Seidel, quando aplicado ao sistema anterior.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que o polinómio característico associado a A é $P(\lambda) = -\lambda^3 - 7\lambda + 1$.

(b) Localize e separe todos os valores próprios de A.

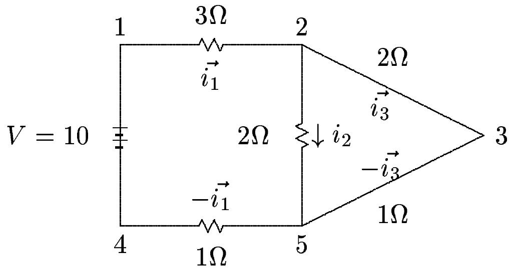
(c) Seja A a matriz de iteração de um método iterativo que aproxima a solução de um sistema de equações lineares $Cx = d$. Será que, recorrendo ao resultado da alínea anterior, pode tirar alguma conclusão acerca da convergência desse método iterativo? Justifique.

9. São precisos três materiais para a produção de três tipos de automóveis, sendo na tabela que se segue indicadas as quantidades necessárias, em kilogramas por carro, de cada um desses materiais:

Carro	Plástico	Borracha	Metal
1	40	100	1500
2	33	120	1700
3	42	100	2000

Considerando que em cada dia há, respectivamente, 2.32, 6.4 e 109 toneladas de plástico, borracha e metal disponíveis, quantos automóveis de cada tipo podem ser produzidos de forma a que se esgote todo o material disponível?

10. Considere o seguinte circuito eléctrico



Por aplicação da lei de *Kirchoff*, as intensidades em cada um dos ramos do circuito podem ser determinadas resolvendo o sistema linear
$$\begin{cases} 2i_1 + i_2 = 5 \\ 2i_2 - 3i_3 = 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \end{cases}.$$

Obtenha uma solução aproximada deste sistema utilizando o método de Gauss-Seidel duas vezes.