Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Mecânica e Engenharia dos Materiais

Ano lectivo 2001/2002 Folha 4

1. Determine o polinómio de Lagrange $P(x)$ que passa pelos pontos $(-3,1)$, $(-2,2)$, $(1,-1)$ e $(3,10)$. Calcule depois $P(0)$.

2. Prove que $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$, em que $l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

3. Determine aproximações de $\cos\frac{\pi}{8}$ usando os polinómios interpoladores de Lagrange de grau 2 e 4 no intervalo $[0,\pi]$. Compare os resultados obtidos e indique majorantes do erro.

4. Considere a função $f(x) = \sin x$, definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   (a) Determine o menor número de pontos que deve considerar no intervalo dado para que o erro da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.1.

   (b) Sabendo que $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, determine uma aproximação para $\sqrt{3}$ utilizando um polinómio interpolador de ordem 2.

5. A seguinte tabela lista a população, em milhares de pessoas, de 1930 a 1980 num certo país.

Ano	1930	1940	1950	1960	1970	1980
População	123.203	131.669	150.697	179.323	203.212	226.505

   Utilize o polinómio de Lagrange para estimar a população no ano 1965.

6. Suponha que é dada a seguinte tabela relativa à função $f(x) = \sqrt{x}$.

x_i	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$f(x_i)$	1.0000	1.0050	1.0100	1.0149	1.0198	1.0247

   (a) Construa a tabela de diferenças divididas e comente o resultado.

   (b) Considerando interpolação linear, determine uma aproximação para $\sqrt{1.005}$.

7. Seja $f(x)$ dada pela seguinte tabela

x_i	-2	0	2	4	6
$f(x_i)$	1	2	-1	2	3

   . Determine uma aproximação para o valor de $f(-1.5)$ usando:

   (a) a fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas;

   (b) a fórmula interpoladora de Newton das diferenças progressivas.

8. Considere a seguinte tabela

x_i	$p(x_i)$	$\Delta p(x_i)$	$\Delta^2 p(x_i)$	$\Delta^3 p(x_i)$	$\Delta^4 p(x_i)$
-1	a				
		1			
0	b		2		
		f		j	
1	c		i		l
		g		k	
2	d		14		
		h			
3	e				

   onde p é o polinómio interpolador de uma função f nos pontos x_i, $i = 0,1,2,3,4$. Sabendo que f é um polinómio de grau 3 que admite a raiz -1, complete a tabela e construa f.

9. Considere a tabela

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$P(x_i)$	3	3.008	3.164	3.216	3.512	4

referente a um polinómio de grau 3. Sabendo que o valor de $P(0.4)$ vem afectado de um determinado erro, calcule esse erro e corrija a tabela apresentada.

10. Determine uma aproximação de $\sin\frac{\pi}{8}$ usando o polinómio interpolador segmentado de grau 2 em 5 pontos no intervalo $[0, \pi]$. Indique um estimativa para o erro cometido.

11. Determine polinómios interpoladores segmentados de grau 1 e 2 para a função $f(x) = x^3$ no intervalo [-1, 1].

12. Determine uma aproximação para o instante da passagem da Lua no perigeu da sua órbita, em Março de 1999, a partir dos valores tabelados para as zero horas de cada dia. Indique também a distância (em raios médios da Terra) da Terra à Lua nesse instante.

dia	19	20	21
distância	57.071	56.955	57.059

13. Determine uma aproximação para a declinação aparente de Vénus para o dia 8 de Maio de 1999, às $18^h30^m45^s$, por interpolação cúbica a partir das *Efemérides Astronómicas* (onde está tabelada para cada dia, às zero horas).

dia	7	8	9	10
δ_i	$+5^o51'47''.55$	$+6^o22'25''.20$	$+6^o52'54''.57$	$+6^o23'14''.96$

14. Uma empresa apresenta os seguintes lucros em função das vendas:

Nº peças vendidas (milhares)	1	2	3	4	5
Lucro (milhares de Euros)	11.2	15.3	17.1	16.9	15.0

Sabendo que o lucro previsto era de 13 mil Euros, indique uma aproximação do número de peças que foi necessário vender para atingir esse lucro.

15. De uma função $f(x)$ conhece-se a tabela

x_i	-2	0	1
$f(x_i)$	-12.5	1.5	-1.0

. Determine x^* tal que $f(x^*) = 0$.

16. Mostre que o polinómio $P_3(x)$ que toma os valores $P_3(0) = f_0$, $P_3(1) = f_1$, $P_3'(0) = f_0'$ e $P_3'(1) = f_1'$, é dado por $P_3(x) = (1-x)^2(1+2x)f_0 + x(1-x)^2 f_0' + x^2(3-2x)f_1 + x^2(x-1)f_1'$.

17. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \cos x$, em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcule, posteriormente, uma aproximação para $\cos\frac{\pi}{4}$ e para $\sin\frac{\pi}{8}$.

18. Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau 5 para a função $f(x) = \cos x + \sin x$, em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

19. Construa o polinómio interpolador de uma função $f(x)$ para o suporte $f(0) = -1$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 10$, $f''(1) = 40$.

20. Determine o polinómio de grau mínimo que faça a concordância entre a recta $y = -2 + \frac{1}{2}(8-x)$, no ponto $(8, -2)$, e a circunferência $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, no ponto $(1, -1)$. *Nota: Duas curvas dizem-se concordantes de tiverem a mesma tangente no ponto de união.*

21. Um automóvel em movimento, com trajectória rectilínea, é cronometrado num determinado número de pontos do seu percurso. Na tabela seguinte são apresentados os dados provenientes dessas observações (tempo em segundos, distância percorrida em metros e velocidade em metros por segundo).

tempo	0	3	5	8	13
distância	0	69	117	190	303
velocidade	22.9	23.5	24.4	22.6	21.9

   (a) Use o polinómio de Hermite para prever a posição do automóvel, bem como a sua velocidade, quando $t = 10$ segundos.

   (b) Utilizando a derivada do polinómio de Hermite, veja se o automóvel alguma vez ultrapassa o limite de velocidade do local que é de 90 quilómetros por hora. Se tal suceder, determine o primeiro instante em que o limite de velocidade é ultrapassado.

   (c) Qual é a velocidade máxima que o automóvel atinge?