Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Mecânica e Engenharia dos Materiais

Ano lectivo 2001/2002 Folha 5

1. É dada a seguinte tabela de valores de uma certa função v

t_i	0	60	120	180	240	300
$v(t_i)$	0.0000	0.0824	0.2747	0.6502	1.3851	3.229

   (a) Determine uma aproximação para $v'(180)$ usando:
      i. Diferenças progressivas;
      ii. Diferenças regressivas;
      iii. Diferenças centradas.

   (b) Como poderia proceder para determinar uma aproximação para $v'(300)$? Justifique.

2. É dada a seguinte tabela de valores de uma certa função f

x_i	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
$f(x_i)$	0.0	0.6	1.0	1.2	1.3

   (a) Determine aproximações para $f'(3.3)$ usando interpolação linear e interpolação quadrática.

   (b) Determine aproximações para $f'(3.1)$ e $f'(3.5)$ usando interpolação linear.

   (c) Determine o polinómio interpolador de Hermite de f no suporte $\{3.1, 3.5\}$.

3. A distância percorrida em metros por um foguete em cada segundo apresenta os seguintes valores

t	0	1	2	3	4	5
y	0	2.5	7.8	18.2	51.9	80.3

   Use diferenciação numérica para aproximar a velocidade e a aceleração do foguete em cada momento.

4. A taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$ onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante (em graus Celsius), respectivamente, e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Se uma esfera de metal aquecida a 90^oC é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 20^o$C, a temperatura da esfera toma os seguintes valores

Tempo (min.)	0	5	10	15	20	25
Temperatura (C)	90	62.5	45.8	35.6	29.5	25.8

   Use diferenciação numérica para aproximar $\frac{dT}{dt}$ em cada momento.

5. Determine valores aproximados para $\int_0^1 e^{-x}\,dx$, usando a regra dos trapézios e a regra de Simpson. Indique um limite superior para o erro cometido em cada um dos casos.

6. Seja $I = \int_{-2}^{-1} xe^{2x}\,dx$.

   (a) Qual o menor número de pontos que deve considerar em $[-2, -1]$ por forma a que o erro cometido no cálculo aproximado do integral dado não exceda 0.5×10^{-3}, quando se utiliza a regra dos trapézios?

   (b) Calcule o valor aproximado de I de acordo com a alínea anterior.

   (c) Repita as alíneas anteriores usando, agora, a regra de Simpson.

7. Considere a seguinte tabela da função $f(x)$:

x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x_i)$	1.00	0.83	0.71	0.62	0.36	0.30

.

(a) Será possível calcular um valor aproximado para o integral $I = \int_0^1 f(x)\,dx$, usando a regra de Simpson ou a regra dos trapézios, através da tabela, com um erro que não exceda 10^{-3}? Justifique a sua resposta.

(b) Calcule um valor aproximado de I e indique uma estimativa para o erro cometido.

8. Pretende calcular-se um valor aproximado para o integral $I = \int_1^2 \ln \frac{1}{x}\,dx$.

   (a) Use a regra de Simpson para obter I com 3 casas decimais correctas.

   (b) Sem calcular o valor exacto de I, diga, justificando, se a aproximação calculada é por defeito ou por excesso.

9. Considere a seguinte equação diferencial $y'(t) + a(t)y(t) = 0$. A solução desta equação é da forma $y(t) = y(0)e^{-\int_0^t a(s)ds}$. Sabendo que $a(0) = 1$, $a(1) = 2$, $a(2) = 1$ e que $y(0) = 1$, determine uma aproximação para $y(2)$.

10. Determine o comprimento aproximado do arco do gráfico da função $f(x) = x^3 - x$, entre os pontos $(-1, 0)$ e $(2, 6)$, usando a regra dos trapézios composta, com quatro sub-intervalos.

11. Considere a função $f(x) = e^x + 2x$.

    (a) Calcule uma aproximação para a raiz de $f(x)$ aplicando o método de Newton-Raphson duas vezes.

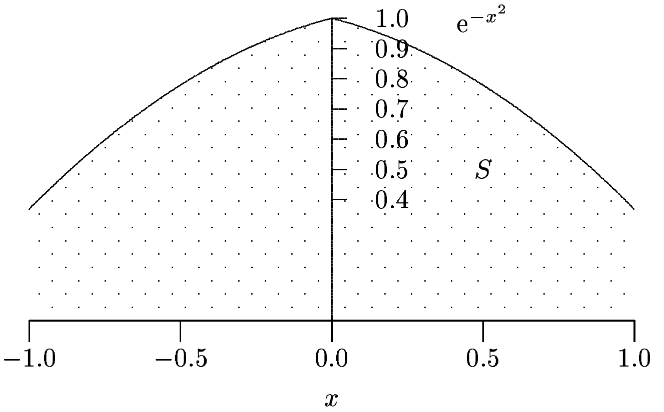
    (b) Utilizando a regra de Simpson, aproxime, com um erro não superior a 10^{-6}, a área da região limitada por $y \leq e^x$, $y \geq -2x$ e $x \leq 0$.

12. A quantidade de massa que entra ou é libertada por um reactor num dado período de tempo é dada por $M = \int_{t_1}^{t_2} Qc\,dt$ onde t_1 e t_2 são os momentos inicial e terminal, respectivamente. Usando integração numérica determine M para $Q = 5\text{m}^3/\text{min}$ e os dados da tabela:

t (min.)	0	10	20	30	40	50
c (mg/m^3)	10.00	35.00	54.73	52.16	37.07	34.06

13. Usando integração numérica aproxime o integral duplo $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \cos(\frac{x}{4} + y)\,dx\,dy$.

14. Usando a regra de Simpson com 7 pontos, calcule uma aproximação numérica do centro de massa de uma chapa de alumínio homogénea com o formato indicado na figura seguinte.



Note que o centro de massa pode ser calculado usando as expressões:

$$x_{CM} = \frac{\int\int_S x\ dxdy}{\int\int_S\ dxdy} \qquad y_{CM} = \frac{\int\int_S y\ dxdy}{\int\int_S\ dxdy}.$$