Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica

Licenciatura em Engenharia Mecânica e Engenharia dos Materiais

Ano lectivo 2001/2002 Folha 6

1. Mostre que o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= \dfrac{1}{1+y^2} \\ y(a) &= \alpha \end{cases}$, para $t \in [a,b]$, tem solução única.

2. Mostre que o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -y+t+1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$, para $t \in [0,1]$, é bem posto.

3. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. Determine, usando o método de Euler

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i),$$

o valor aproximado de $y(1)$, fazendo $h=1$, $h=0.5$ e $h=0.25$. Compare os resultados obtidos sabendo que a solução exacta é $y(t) = e^{-2t}$.

4. Num circuito de voltagem aplicada E, resistência R, inductância L e capacitância C em paralelo, a corrente I satisfaz a equação diferencial

$$I' = CE'' + \frac{E'}{R} + \frac{E}{L}.$$

Suponha que $C = 0.3\ farad$, $R = 1.4\ ohm$, $L = 1.7\ henry$ e a voltagem é dada pela equação $E(t) = e^{-0.06\pi t}\sin(2t-\pi)$. Se $I(0)=0$, determine o valor da corrente I para $t = 0.2j$, para $j = 1, \ldots, 5$, usando o método de Euler.

5. Seja dado o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= \dfrac{1}{1+y^2} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. Use o método de Taylor de ordem dois – $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}(f_t + f_y f)(t_i, y_i)$ – para determinar o valor aproximado de $y(1)$.

6. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= ty^2 \\ y(1) &= 2 \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $y(1.1)$, usando o método de Heun:

$$k_1 = f(t_i, y_i)\,; \;\; k_2 = f(t_i + h, y_i + hk_1)\,;$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\,.$$

7. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= y - \dfrac{2t}{y} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $y(0.8)$, usando o método de Runge-Kutta de ordem quatro:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

8. Mostre que, quando o segundo membro f não depende de y, o método de Runge-Kutta de quarta ordem se reduz à aplicação da regra de Simpson.

9. Considere o problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -50y \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right.$ e os métodos $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ e $y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$. Usando cada um dos métodos determine a solução do problema em $t = 1$ com $h < 1$, comparando os resultados obtidos.

10. Considere o método dos trapézios – $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})]$ – na resolução de um problema de condição inicial.

    Aplique o método ao problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & -ty^2 \\ y(0) & = & 2 \end{array} \right.$ e obtenha uma aproximação em $t = 1$ usando $h < 1$.

11. A taxa de arrefecimento de um corpo pode ser expressa por

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

    onde T e T_a são as temperaturas do corpo e do meio circundante, respectivamente, (em graus Celsius), e k é uma constante de proporcionalidade (por minuto). Considerando que uma esfera de metal aquecida a 90^oC é mergulhada em água mantida à temperatura constante de $T_a = 20^o$C, use um método numérico para calcular quanto tempo leva a esfera a arrefecer até aos 30^oC se $k = 0.1$ min^{-1}.

12. Converta em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem os seguintes problemas:

    (a) $y'' - 3y' + 2y = 0\,, \qquad y(0) = y'(0) = 1;$

    (b) $y''' - 0.1(1 - y^2)y' + y = 0\,, \qquad y(0) = 1\,,\ y'(0) = y''(0) = 0.$

13. Considere a equação diferencial $y'' + 4ty' + 2y^2 = 0$ com condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. Com $h = 0.1$, utilize os métodos de Euler e de Heun para obter aproximações para $y(0.5)$ e $y'(0.5)$.

14. A equação de Van der Pol

$$u'' - \mu\left(u^2 - 1\right)u' + u = 0,\ \ \mu > 0,$$

    é um modelo para o fluxo de corrente num tubo de vácuo com três elementos internos. Seja $\mu = 0.5$ e $u\,(0) = 0$, $u'\,(0) = 1$. Aproxime $u\,(1)$ e $u'\,(1)$ usando o método de Euler implícito, com medida do passo $h = 0.5$.

15. Use o método das diferenças finitas para aproximar a solução dos problemas com condições de fronteira seguintes, comparando os valores obtidos com a solução exacta:

    (a) $\left\{ \begin{array}{lcll} y'' & = & y' + 2y + \cos x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ y(0) & = & -0.3, & y(\frac{\pi}{2}) = -0.1 \end{array} \right.,$

    com $h = \dfrac{\pi}{4}$. A solução exacta é $y(x) = -0.1(\sin x + 3\cos x)$.

    (b) $\left\{ \begin{array}{lcll} y'' & = & 2y^3, & 1 \le x \le 2 \\ y(1) & = & 0.25, & y(2) = 0.2 \end{array} \right.,$

    com $h = 0.25$. A solução exacta é $y(x) = (x + 3)^{-1}$.

16. O potencial electrostático, u, da região entre duas esferas de metal concêntricas de raios $R_1 = 3$ cm e $R_2 = 6$ cm, tais que o potencial da esfera interior se mantém a $V_1 = 110$ volts e o da exterior é de 0 volts, pode ser traduzido pela equação

$$u'' + \frac{2}{r}u' = 0, \quad R_1 \le r \le R_2, \quad u(R_1) = V_1, \quad u(R_2) = 0.$$

    (a) Aproxime $u(5)$ usando diferenças finitas com $h = 0.5$.

    (b) Compare o resultado de (a) com o verdadeiro potencial $u(5)$, onde $u(r) = \dfrac{V_1 R_1}{r}\left(\dfrac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right)$.