Capítulo 4

Interpolação polinomial

4.1 Breve referência histórica

Al-Biruni (973-1050), um grande matemático árabe, já usava interpolação quadrática e é possível que tivesse tido imitadores e discípulos que o fizessem também. Mas foi só no séc. XVII que se efectuaram os primeiros estudos sistemáticos sobre esta matéria, nomeadamente sobre o cálculo das diferenças finitas.

Henry Briggs (1556-1630) teve um papel importante nesta matéria ao usar fórmulas de interpolação para tabelar os logaritmos. No entanto, é necessário recuar um pouco no tempo até um colega seu, Thomas Harriot (1560-1621) em Oxford, para encontrar o verdadeiro inventor do cálculo das diferenças finitas. Harriot, tal como Briggs, estava muito interessado em problemas de navegação.[1] Apesar de contribuir de forma notável para esta área da Análise Numérica, os seus trabalhos foram substimados e pouco estudados. Briggs desenvolveu e aplicou ao cálculo logarítmico os trabalhos do seu predecessor tendo sido reconhecido, mais tarde, pelo grande matemático francês Lagrange.

No entanto, nesta área como em tantas outras, talvez ninguém tenha feito tanto como o génio inglês Isaac Newton (1643-1727). Ele, aparentemente, desenvolveu os seus estudos desconhecendo os resultados de Harriot e Briggs. O aparecimento das suas ideias surge numa carta datada de 8 de Maio de 1675 mas a publicação definitiva teve que esperar até muito mais tarde.

Newton pretendia ajudar um colega seu, John Smith, que estava profundamente interessado no problema de Wallis: determinar a área do quadrante de um círculo dada por

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Estas preocupações levaram-no ao aprofundamento das suas ideias nesta matéria até produzir o conceito actual de diferença finita. É de notar que o esforço de Newton foi amplamente reconhecido e meritório, facto esse visível na numerosa quantidade de fórmulas ligadas à teoria da interpolação com o seu nome: Newton; Gregory-Newton; Newton-Gauss; Newton-Cotes; Newton-Bessel, etc.

Da generalização de um resultado apresentado por John Wallis que consistia em obter π por interpolação, Newton obteve o que é hoje conhecido por Teorema do Binómio sobre o qual

[1] Note-se que estamos no tempo dos grandes navegadores isabelinos: Drake, Frobisher, Hawking e Raleigh. Aliás, Harriot foi professor de Walter Raleigh e foi acompanhar um grupo deste navegador na colonização da Virgínia.

Fernando Pessoa disse, pela boca de Álvaro de Campos: 'o Teorema do Binómio é tão belo como a Vénus de Milo; o que há é pouca gente para dar por isso'. Este teorema é considerado como um dos mais brilhantes resultados da Matemática. Note-se, de passagem, que o símbolo '∞' para designar infinito foi introduzido por Wallis neste seu trabalho.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) também deu um importante contributo no capítulo da interpolação publicando inúmeros resultados e introduzindo uma nova e simples notação que ainda hoje é usada. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) também se dedicou a esta área da Análise Numérica, sobretudo inspirado pelas ideias de Briggs. Lagrange trabalhou seriamente estes assuntos publicando numerosos resultados entre os quais poderemos destacar: o estabelecimento da relação entre as derivadas de uma função e as suas diferenças; a apresentação, em 1794/5, da fórmula de interpolação que actualmente possui o seu nome mas que ele atribuia a Newton; a descoberta da interpolação trigonométrica (Alexis Claude Clairaut (1713-1765) também a descobriu independentemente), etc.

Outros matemáticos brilhantes que também trabalharam nesta matéria foram: Pierre Simon Laplace (1749-1827) no cálculo das diferenças finitas; Carl Friedrich Gauss (1777-1855) na determinação de fórmulas de quadratura numérica; Augustine Louis Cauchy (1789-1857) em interpolação por fracções racionais; etc.

Para terminar é de salientar ainda o nome do matemático francês Charles Hermite (1822-1901) cujo resultado mais conhecido nesta área é, sem dúvida, a fórmula de interpolação com o seu nome. Hermite foi também um dos primeiros a notar a beleza e importância do teorema dos rezíduos de Cauchy e como este poderia ser usado para obter aproximação de funções.

4.2 Introdução

Seja f uma função real definida num conjunto de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Pretende-se calcular o valor de $f(\overline{x})$, com $\overline{x} \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Tal situação é muito frequente, por exemplo, no contexto das equações diferenciais. Quando se usam métodos numéricos para aproximar a solução de uma equação diferencial esta fica apenas conhecida num conjunto de pontos. A interpolação permite assim encontrar uma função que passa por esse conjunto de pontos e que pode funcionar como uma aproximação à solução da equação diferencial.

Exemplo 4.1 Dada a tabela

x_i	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
$\log x_i$	0.34242	0.36173	0.38021	0.39794	0.41497

,

calcular o valor de $\log 2.45$.

Em linhas gerais, o conceito de interpolação consiste em determinar uma função $G(x) = a_0\phi_0(x) + \cdots + a_n\phi_n(x)$, gerada por uma certa família de funções $\{\phi_k\}_{k=0}^n$, por forma a que

$$f(x_i) = G(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

A função G nestas condições é designada por função interpoladora de f nos pontos de suporte (interpolação) $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Nada nos garante que o problema da interpolação tenha sempre solução. Por exemplo, fazendo $\phi_0(x) = 1$ e $\phi_1(x) = x^2$, não existe nenhuma função $G(x) = a_0 + a_1x^2$ que passe nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, 0)$.

4.3 Interpolação polinomial de Lagrange

Um caso particular de interpolação com grande importância devido ao grande número de aplicações é a interpolação polinomial. Neste caso as funções geradoras são, por exemplo, $\phi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Definição 4.2 *Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$ e conhecida nos pontos da partição*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < n_{n-1} < x_n = b. \tag{4.1}$$

Um polinómio P que satisfaz

$$f(x_i) = P(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n, \tag{4.2}$$

é chamado polinómio interpolador (de Lagrange) *de f nos pontos da partição dada.*

Exercício 4.3.1 Dada a tabela do exercício anterior, determine o valor aproximado de $\log 2.45$, usando interpolação polinomial.

Resolução: Vamos calcular o polinómio P_3 de grau menor ou igual a 3, interpolador de $y = \log x$ nos pontos 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6. De acordo com a definição temos $P_3(2.3) = 0.36173$, $P_3(2.4) = 0.38021$, $P_3(2.5) = 0.39794$, e $P_3(2.6) = 0.41497$. Isto é, se $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + 2.3a_1 + 5.29a_2 + 12.167a_3 = 0.36173 \\ a_0 + 2.4a_1 + 5.76a_2 + 13.824a_3 = 0.38021 \\ a_0 + 2.5a_1 + 6.25a_2 + 15.625a_3 = 0.39794 \\ a_0 + 2.6a_1 + 6.76a_2 + 17.576a_3 = 0.41497 \end{array} \right. .$$

Sendo o sistema possível e determinado tal polinómio existe e é único. Assim

$$P_3(x) = -0.33540 + 0.50502x - 0.09750x^2 + 0.00833x^3$$

é o polinómio pretendido. Temos então que $\log 2.45 \approx P_3(2.45) = 0.38916$. Compare-se este valor com o valor exacto $\log 2.45 = 0.38916608\ldots$. Note-se que o erro cometido na aproximação não excede 0.7×10^{-5}.

Os polinómios interpoladores constituem meios de aproximação de funções muito usados. Além disso, as fórmulas desenvolvidas para a interpolação polinomial estão na base do desenvolvimento de muitos métodos numéricos para o cálculo de raízes de equações não lineares (método da secante, etc.), cálculo de integrais e derivadas, bem como a resolução de equações diferenciais.

4.3.1 Existência e unicidade. Fórmula de Lagrange

O método de determinar um polinómio interpolador usado no Exercício 4.3.1 não é eficiente nem estável. Apresentaremos, neste capítulo, alguns métodos mais eficientes para a sua determinação.

O próximo teorema estabelece a existência e unicidade do polinómio de grau inferior ou igual a n interpolador de uma função em $n + 1$ pontos distintos. Além disso, indica-nos um processo que permite a sua determinação.

Teorema 4.3 (Lagrange) *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$ e conhecida nos pontos da partição (4.1). Existe um e um só polinómio P_n de grau menor ou igual a n interpolador de f nos pontos dados.*

Demonstração: Consideremos o polinómio P_n definido por

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \tag{4.3}$$

em que

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Notemos que cada l_i é um polinómio de grau n. Além disso

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

isto é $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$ onde $\delta_{i,j}$ representa o símbolo de Kronecker[2]. Portanto a função P_n é um polinómio de grau menor ou igual a n que verifica as condições de interpolação (4.2), o que prova a existência de solução do problema em causa.

Para provar a unicidade, suponhamos que P_n e Q_n são dois polinómios de grau menor ou igual a n interpoladores de f nos pontos da partição dada. Então o polinómio

$$R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

anula-se, pelo menos, nos pontos x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Como R_n é um polinómio de grau menor ou igual a n, ele só pode ter $n+1$ zeros se for identicamente nulo. Assim sendo, $P_n(x) = Q_n(x)$, o que prova o pretendido. □

As expressões (4.3) e (4.4) definem a fórmula de Lagrange para calcular o polinómio interpolador de f nos pontos (4.1).

Observação 4.4 *O resultado anterior diz-nos que por $n+1$ pontos passa um e um só polinómio de grau n. Assim temos que, se a funçao f a interpolar for um polinómio de grau n coincide com o seu polinómio interpolador do mesmo grau, podendo assim ser escrita na forma*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x).$$

Exercício 4.3.2 Mostre que fórmula de Lagrange pode ser escrita na forma

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{w(x)}{(x - x_i) w'(x_i)}, \tag{4.5}$$

sendo

$$w(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{4.6}$$

[2]Leopold Kronecker (1823-1891), eminente matemático do século XIX, ficou célebre, entre outras coisas, por ter afirmado: 'Deus criou os números inteiros; o resto é obra do Homem.'

Resolução: Atendendo a (4.6) temos que

$$w'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j) \Rightarrow w'(x_i) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (x_i - x_j),$$

e como tal

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)},$$

o que prova o pretendido.

Exercício 4.3.3 Dada a tabela

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	4	15	40	85

,

determine uma aproximação para $f(1.5)$, usando interpolação cúbica.

Resolução: Temos que

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1)(-2)(-3)} = -\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4) \\
l_1(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(1)(-2)(-3)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4) \\
l_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(2)(1)(-3)} = -\frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-4) \\
l_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(3)(3)(1)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3).
\end{aligned}$$

Assim

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) l_i(x) = \cdots = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Atendendo à fórmula de Lagrange podemos construir o seguinte algoritmo para calcular o valor de $P_n(\overline{x})$, sendo P_n o polinómio interpolador de f nos $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Algoritmo 4.1 Fórmula de Lagrange

Ler n;
Ler $\overline{x}$ e x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$;
$\overline{p} := 0$;
Para i de 0 até n fazer
  $p := 1$;
  Para j de 0 até n fazer
    Se $j \neq i$ então $p := p(\overline{x} - x_j)/(x_i - x_j)$;
  $\overline{p} := \overline{p} + f(x_i)p$;
Escrever $\overline{p}$.

4.3.2 Erro de interpolação

Por definição, o polinómio interpolador coincide com a função num dado conjunto de pontos de suporte. Interessa-nos saber, no entanto, se para os outros pontos do domínio da função, o polinómio interpolador constitui uma boa ou uma má aproximação para a função. Nesse sentido temos o seguinte teorema.

Teorema 4.5 *Seja P_n o polinómio de grau menor ou igual a n interpolador da função f nos pontos da partição (4.1). Se $f \in C^n([a,b])$ e se $f^{(n+1)}$ for contínua em (a,b), então para cada $\overline{x} \in [a,b]$ existe $\xi = \xi(\overline{x}) \in (a,b)$ tal que*

$$e(\overline{x}) = f(\overline{x}) - P_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(\overline{x}), \tag{4.7}$$

onde $w(x)$ é a função dada por (4.6).

Demonstração: Se $\overline{x} = x_i$, para algum i o resultado é, obviamente, válido. Se $\overline{x} \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, definamos a função auxiliar

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{w(x)}{w(\overline{x})}(f(\overline{x}) - P_n(\overline{x})).$$

Ora, como $F(x) = 0$ possui $n+2$ raízes distintas em $[a,b]$, uma vez que $F(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, e $F(\overline{x}) = 0$, temos, por aplicação do Teorema de Rolle, que $F'(x) = 0$ possui pelo menos $n+1$ raízes distintas em (a,b), $F''(x) = 0$ possui pelo menos n raízes distintas em (a,b) e, sucessivamente, $F^{(n+1)}(x) = 0$ possui pelo menos uma raiz em (a,b). Seja ξ essa raiz. Uma vez que

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)!}{w(\overline{x})}(f(\overline{x}) - P_n(\overline{x})),$$

substituindo x por ξ, obtém-se (4.7). $\square$

Observação 4.6 *Na prática o erro de interpolação aparece, usualmente, na forma*

$$|e(\overline{x})| = |f(\overline{x}) - P_n(\overline{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|w(\overline{x})|, \tag{4.8}$$

onde

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|.$$

Note-se a semelhança existente entre a fórmula do erro na interpolação e na fórmula de Taylor. A diferença está que, enquanto a primeira usa informação em vários pontos distintos, a segunda recorre apenas a um único ponto.

Exercício 4.3.4 Determine uma estimativa para o erro que se cometeu na aproximação efectuada no Exercício 4.3.1.

Resolução: Neste caso temos, atendendo a (4.8),

$$|e_3(\overline{x})| = |\log \overline{x} - P_3(\overline{x})| \leq \frac{M_4}{4!}|(\overline{x}-2.3)(\overline{x}-2.4)(\overline{x}-2.5)(\overline{x}-2.6)|,$$

onde

$$M_4 = \max_{x\in[2.3,2.6]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \max_{x\in[2.3,2.6]} \frac{6}{x^4 \ln 10} = 0.093116.$$

Fazendo $\overline{x} = 2.45$ vem

$$|\log 2.45 - P_3(2.45)| \leq \frac{0.093116}{24}|(2.45-2.3)(2.45-2.4)(2.45-2.5)(2.45-2.6)|,$$

ou seja $|e_3(2.45)| \leq 0.917 \times 10^{-5}$.

Exercício 4.3.5 Considere a função $f(x) = \cos x$ para x em $[0, \pi]$. Determine o número de pontos a considerar no intervalo dado para que o erro máximo da aproximação de $f(x)$ por um polinómio interpolador nesses pontos seja inferior a 0.5.

Resolução: Temos que, para $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{x\in[0,\pi]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}|w(\overline{x})| = \frac{|w(x)|}{(n+1)!} \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Resta assim determinar qual o menor valor de n que satisfaz

$$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \leq 0.5.$$

Por tentativas...

$$n = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^7}{7!} = 0.59$$

$$n = 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^8}{8!} = 0.23.$$

Logo o menor número de pontos que garantem a aproximação pretendida são 8.

Observação 4.7

1. *Para usar a fórmula do erro de interpolação (4.7) é necessário conhecer a derivada de ordem $n+1$ da função a interpolar. No entanto, nem sempre a expressão da função é conhecida e mesmo quando o é a obtenção de derivadas de ordem superior é muitas vezes trabalhosa.*

2. *No cálculo do polinómio interpolador usando a fórmula de Lagrange, a passagem de P_n a P_{n+1}, pela adição de mais um ponto x_{n+1} ao suporte de interpolação, obriga a que se refaçam os cálculos dos polinómios de Lagrange. Acontece que, na prática, se recorre com frequência a essa mudança de grau a fim de observar o comportamento da função erro.*

3. Quanto ao esforço computacional, note-se que quando se usa a fórmula de Lagrange para calcular o polinómio interpolador, supondo as constantes

$$\frac{f(x_i)}{w'(x_i)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

calculadas à priori, o cálculo do valor do polinómio interpolador num determinado ponto requer $n(n+2)$ adições/subtrações e $n(n+1)$ multiplicações/divisões.

Exercício 4.3.6 Seja f uma função nas condições do teorema anterior e tal que (4.8) se verifica. Seja P_n o seu polinómio interpolador nos pontos da partição (4.1).

1. Mostre que o seu erro de interpolação verifica

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{4(n+1)} h^{n+1}, \qquad \forall x \in [a, b], \tag{4.9}$$

com $h = \max\limits_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$.

2. Mostre que se a partição (4.1) for uniforme se tem

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{4(n+1)n^{n+1}} (b-a)^{n+1}, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Resolução: Vamos apenas demonstrar (4.9). Para tal, basta provar que

$$\max_{x \in [a,b]} |w(x)| \leq \frac{h^{n+1} n!}{4},$$

com w a função nodal (4.6). Vamos efectuar a demonstração por indução.

Para $n = 1$ temos que $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)$. Assim, temos que

$$w'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Como tal,

$$\max_{x \in [a,b]} |w(x)| = \max \left\{ |w(a)|, \left| w\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \right|, |w(b)| \right\} = \left| w\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) \right| \leq \frac{h^2}{4}.$$

Suponhamos que (4.9) se verifica para n e provemos a sua veracidade para $n+1$, isto é, que

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^{n+1} (x - x_j) \right| \leq \frac{h^{n+2}(n+1)!}{4},$$

com $a = x_0$ e $x_{n+1} = b$. Dado $x \in [a, b]$ temos que $x \in [a, x_n]$ ou $x \in [x_n, b]$. Consideremos a primeira hipótese. Temos então

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^{n+1} (x - x_j) \right| = \max_{x \in [a,b]} \left| \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| |x - b| \leq \frac{h^{n+1} n!}{4} (n+1) h = \frac{h^{n+2}(n+1)!}{4},$$

o que prova o pretendido. O caso em que se considera a segunda hipótese demonstra-se de forma análoga.

Consideremos uma função f definida num intervalo $[a, b]$ onde está definida uma partição uniforme (4.1) e seja P_n o seu polinómio interpolador de Lagrange. Provámos, no exercício anterior, que

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{4(n+1)n^{n+1}}(b-a)^{n+1},$$

para todo o $x \in [a, b]$. Se existir uma constante positiva M tal que

$$M_{n+1} \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4.10}$$

concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \right) \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{M}{4(n+1)n^{n+1}}(b-a)^{n+1} \right) = 0.$$

Neste caso, o processo de interpolação é convergente, isto é, o aumento do grau do polinómio implica um aumento de precisão.

No entanto existem funções para as quais não podemos concluir que um aumento do grau do provoque um aumento da proximidade do polinómio interpolador com a função interpolada. Isso acontece quando não é possível encontrar um majorante (4.10) para as derivadas da função. Um exemplo que ilustra esta situação foi considerado por Carl Runge em 1901 e é o apresentado no exercício seguinte.

Exercício 4.3.7 Considere a função (de Runge) $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$, $x \in [-1, 1]$. Verifique graficamente que

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_3(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P_8(x)|,$$

em que P_3 e P_8 são, respectivamente, os polinómios de Lagrange de grau 3 e 8 interpoladores de f em partições uniformes de $[-1, 1]$.

4.3.3 Diferenças divididas

Vamos apresentar uma outra forma de calcular o polinómio interpolador que exige um menor esforço computacional. Para isso temos necessidade de definir o conceito de diferença dividida.

Definição 4.8 *Seja f uma função definida em $[a, b] \subseteq IR$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n$, pontos distintos desse intervalo. A*

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

chama-se diferença dividida de primeira ordem *de f relativamente aos argumentos x_i e x_{i+1}. As diferenças divididas de ordem superior definem-se recursivamente. Assim, define-se* diferença dividida de ordem k *relativamente aos argumentos $x_i, x_{i+1}, \ldots x_{i+k}$, com $i + k < n$, por*

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Denotemos por $f_{i,i+j}$ a diferença $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}]$.

As diferenças divididas são usualmente dadas pela conhecida tabela das diferenças divididas

x_i	$f(x_i)$	$f_{i,i+1}$	$f_{i,i+2}$	$f_{i,i+3}$	$\cdots$
x_0	f_0				
		$f_{0,1}$			
x_1	f_1		$f_{0,2}$		
		$f_{1,2}$		$f_{0,3}$	
x_2	f_2		$f_{1,3}$		$\cdots$
		$f_{2,3}$		$\cdots$	
x_3	f_3		$\cdots$		$\cdots$
		$\cdots$		$f_{n-3,n}$	
$\cdots$	$\cdots$		$f_{n-2,n}$		
		$f_{n-1,n}$			
x_n	f_n				

que pode ser obtida pelo seguinte algoritmo.

Algoritmo 4.2 Diferenças divididas

Ler n;
Ler x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$;
$f_0 := f(x_0)$;
Para i de 1 até n fazer
    $f_i := f(x_i)$;
    Para j de $i - 1$ até n fazer
        $f_{j,i} := (f_{j+1,i} - f_{j,i-1})/(x_i - x_j)$;
Escrever $f_{j,i}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = i - 1, \ldots, n$.

Um resultado importante respeitante às diferenças divididas é o dado no próximo teorema.

Teorema 4.9 *As diferenças são invariantes para qualquer permutação dos índices de suporte.*

Demonstração: Com efeito, tem-se que

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = f[x_{i+1}, x_1].$$

Por indução conclui-se facilmente que o mesmo acontece para as diferenças divididas de qualquer ordem. □

4.3.4 Fórmula de Newton das diferenças divididas

Com intuito de diminuir o esforço computacional no cálculo do polinómio interpolador, vamos escrever o único polinómio interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de grau menor ou igual a n na forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \quad (4.11)$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes apropriadas.

Para determinar a_0 note-se que, se $P_n(x)$ poder ser escrito na forma (4.11), temos que

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0).$$

De forma similar temos que a_1 pode ser determinado calculando P_n no ponto x_1. Assim

$$f(x_0) + a_1(x - x_1) = P_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = f[x_0, x_1].$$

Prosseguindo de forma idêntica é possível provar que

$$a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Conclui-se então que o polinómio interpolador de Lagrange de f nos pontos da partição (4.1) pode ser dado na forma

$$\begin{aligned} P_n(x) = \ & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\ = \ & f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j), \end{aligned} \tag{4.12}$$

Esta fórmula que permite calcular o polinómio interpolador é conhecida por fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas.

Observação 4.10 *Notemos que:*

1. *os coeficientes da fórmula de Newton estão ao longo da diagonal da tabela das diferenças divididas;*
2. *uma vez determinado P_n, para determinar P_{n+1} basta fazer*

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] \prod_{j=0}^{n}(x - x_j).$$

A fórmula (4.12) pode ser calculada de forma mais eficiente se for calculada pelo método de Horner.

Exercício 4.3.8 Escreva a fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas usando o método de Horner.

Observação 4.11 *O cálculo do polinómio interpolador usando o fórmula interpoladora de Newton das diferenças divididas na forma encaixada, supondo calculados os coeficientes $f(x_0)$, $f[x_0, x_1]$, ..., $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, requer apenas $2n$ adições/subtracções e n multiplicações/divisões.*

O valor do polinómio interpolador num determinado ponto do seu domínio pode ser dado pelo seguinte algoritmo.

Algoritmo 4.3 Fórmula de Newton das diferenças divididas

Ler n;
Ler $\overline{x}$ e x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$;
$f_{0,0} := f(x_0)$;
Para i de 1 até n fazer
  $f_{i,i} := f(x_i)$;
  Para j de $i-1$ até n fazer
    $f_{j,i} := (f_{j+1,i} - f_{j,i-1})/(x_i - x_j)$;
$\overline{p} := f_{0,n}$;
Para i de $n-1$ até 0 fazer
  $\overline{p} := f_{0,i} + (x - \overline{x})\overline{p}$
Escrever $\overline{p}$.

Exercício 4.3.9 Dada a tabela

x_i	1	-1	-2
$f(x_i)$	0	-3	-4

,

determine uma aproximação para $f(0)$, usando interpolação quadrática.

Resolução: Temos

x_i	$f(x_i)$	$f_{i,i+1}$	$f_{i,i+2}$
1	0		
		3/2	
-1	-3		1/6
		1	
-2	-4		

.

Assim

$$P_2(x) = 0 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{6}(x^2-1) = (x-1)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}(x+1)\right).$$

Temos então que $f(0) \approx P_2(0) = -\frac{5}{3}$.

Exercício 4.3.10 Mostre

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{w'(x_i)},$$

sendo $w(x)$ a função dada por (4.6).

Como foi visto anteriormente, a determinação do erro do de interpolação usando a fórmula (4.7) não é possível quando a expressão analítica de f é desconhecida. O seguinte teorema permite contornar este problema.

Teorema 4.12 (Valor Médio de Lagrange generalizado) *Seja $f \in C^n([a,b])$ uma função conhecida nos pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a,b]$. Então existe um $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Demonstração: Seja
$$e(x) = f(x) - P_n(x),$$
com P_n o polinómio interpolador de f nos pontos dados. Assim sendo, a função e tem $n+1$ zeros distintos o que implica, pelo Teorema de Rolle generalizado que existe um $\xi \in (a,b)$ tal que $e^{(n)}(\xi) = 0$. Assim,
$$0 = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - f[x_0, x_1, \ldots, x_n]n!,$$
o que prova o pretendido. $\square$

O teorema anterior permite-nos concluir que, na ausência de informação sobre $f^{(n+1)}$, uma boa estimativa para o erro de interpolação pode ser dada por
$$w(x)f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}],$$
com $w(x)$ dado por (4.6), caso as diferenças divididas de ordem $n+1$ não variem muito.

4.3.5 Interpolação em pontos igualmente distanciados

Quando os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ estão igualmente distanciados, isto é, quando $x_i - x_{i-1} = h$, para $i = 1, \ldots, n$, a fórmula (4.12) pode ser dada em termos dos chamados operadores de diferenças finitas. Dentro da classe desses operadores vamos apenas considerar o operador diferença progressiva.

Definição 4.13 *Seja f uma função definida em $[a,b] \subseteq IR$. O* operador diferença progressiva *define-se por recursão da seguinte forma: a*
$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$
chama-se diferença progressiva de primeira ordem *de f; a* diferença progressiva de ordem k *é definida por*
$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1}(\Delta f(x)).$$

Exercício 4.3.11 Prove (por indução) que se f for uma função real definida em $[a,b] \subseteq IR$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são pontos de $[a,b]$ igualmente distanciados, com $x_{i-1} - x_i = h$, $i = 1, \ldots, n$, então
$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}, \tag{4.13}$$
para todo o $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Substituindo (4.13) em (4.12) temos que
$$\begin{aligned} P_n(x) = \quad & f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (4.14) \\ = \quad & f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i f(x_0)}{i!h^i} \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j). \end{aligned}$$

Esta fórmula é conhecida por fórmula interpoladora de Newton das diferenças progressivas.

As diferenças progressivas podem ser dadas pela seguinte tabela, conhecida por tabela das diferenças progressivas.

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\cdots$
x_0	f_0				
		$\Delta f(x_0)$			
x_1	f_1		$\Delta^2 f(x_0)$		
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f(x_1)$		$\cdots$
		$\Delta f(x_3)$		$\cdots$	
x_3	f_3		$\cdots$		$\cdots$
		$\cdots$		$\Delta^3 f(x_{n-3})$	
$\cdots$	$\cdots$		$\Delta^2 f(x_{n-2})$		
		$\Delta f(x_{n-1})$			
x_n	f_n				

Exercício 4.3.12 Construa um algoritmo para determinar o valor do polinómio interpolador num determinado ponto do seu domínio usando a fórmula interpoladora de Newton das diferenças progressivas.

Exercício 4.3.13 Mostre

$$\Delta \arctan x = \arctan \frac{h}{1 + xh + x^2}.$$

Resolução: Vamos provar que

$$\tan(\Delta \arctan x) = \frac{h}{1 + xh + x^2}.$$

Como

$$\tan(\Delta \arctan x) = \tan(\arctan(x+h) - \arctan x) = \frac{h}{1 + xh + x^2}.$$

Observação 4.14 *Atendendo ao Teorema do Valor Médio de Lagrange generalizado e a (4.13) temos que*

$$\frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n} = f^{(n)}(\xi), \tag{4.15}$$

com $\xi \in (a, b)$.

4.3.6 Interpolação segmentada linear

Consideremos um intervalo $[a, b]$ e uma partição dada por (4.1). Designemos por polinómio segmentado linear (ou função linear por segmentos) na partição (4.1), uma função contínua em $[a, b]$ que, quando restringida a cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, da partição, coincide com um polinómio de grau menor ou igual a um (polinómio que, em geral, varia com i).

Observação 4.15 *Note-se que, em geral, nos pontos* x_i, $i = 0, \ldots, n$, *que definem a partição as funções lineares por segmentos apresentam descontinuidadas da derivada.*

Consideremos agora o problema da interpolação. Seja f uma função conhecida nos pontos da partição (4.1). Pelo que foi visto na secção anterior, é óbvio que existe um e um só polinómio segmentado linear S tal que

$$S(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Nestas condições, S é chamado o polinómio interpolador (de Lagrange) segmentado linear de f nos pontos de (4.1).

Temos que

$$S(x) = \begin{cases} S^{(1)}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S^{(2)}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S^{(i)}(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \vdots \\ S^{(n)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

onde $s^{(i)}$ pode ser escrita na forma seguinte (fórmula de Newton)

$$S^{(i)}(x) = f(x_{i-1}) + f[x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1}),$$

ou ainda (fórmula de Lagrange)

$$S^{(i)}(x) = f(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

O que podemos dizer quanto ao erro que se comete ao aproximar f pelo seu polinómio interpolador segmentado linear?

Suponhamos que $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Temos então que, nesse intevalo,

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \left| f(x) - S^{(i)}(x) \right| \leq \frac{M_2^{(i)}}{2} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |(x - x_{i-1})(x - x_i)|$$

com

$$M_2^{(i)} = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \left| f^{(2)}(x) \right|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Mas, como vimos,

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |(x - x_{i-1})(x - x_i)| = \frac{1}{4}(x_i - x_{i-1}))^2$$

e, com tal

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \left| f(x) - S^{(i)}(x) \right| \leq \frac{M_2^{(i)}}{8} h_i^2,$$

com $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$.

Consideremos agora $x \in [a, b]$. Atendendo ao que foi dito,conclui-se imediatamente que

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2,$$

onde $M_2 = \max\limits_{i=1,\ldots,n} M_2^{(i)}$ e $h = \max\limits_{i=1,\ldots,n} h_i$.

Este limite superior para o erro permite demonstrar que o processo de interpolação linear por segmentos é convergente. De facto, se $f^{(2)}$ é limitada, à medida que o número de pontos da partição aumenta (h diminui) o erro tendo para zero, ou seja, o polinómio segmentado linear tende para a função a interpolar uniformemente em $[a, b]$.

Observação 4.16 *A interpolação linear segmentada possui vantagens em relação à interpolação (global) de Lagrange. Note-se que, se n é muito grande o cálculo do polinómio interpolador de Lagrange (global) P_n envolve muito mais operações que o cálculo do polinómio interpolador linear segmentado S. Além disso, como foi visto, o facto de n aumentar não implica que o polinómio interpolador de Lagrange P_n tenda para a função a interpolar, mesmo que essa função seja infinitamente diferenciável. A desvantagem que o processo da interpolação segmentada linear apresenta relativamente à interpolação de Lagrange é que o polinómio P_n é infinitamente diferenciável enquanto que s pode não ter (e, em geral, não tem) derivadas contínuas nos pontos da partição.*

4.4 Interpolação de Hermite

O objectivo da interpolação de Hermite é o de representar uma função f por um polinómio que seja interpolador de f em alguns pontos do seu domínio e que a sua derivada seja interpolador da derivada de f nesses mesmos pontos. Isto é, supondo que f é diferenciável, vamos procurar um polinómio H tal que

$$\begin{array}{l} f(x_i) = H(x_i) \\ f'(x_i) = H'(x_i) \end{array}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.16}$$

Quando tal situação acontece dizemos que f e H são funções que 2-osculam (osculam 2 vezes) os pontos x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, ou que é um polinómio 2-osculador de f nos pontos x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

4.4.1 Existência e unicidade

O próximo teorema estabelece a existência e unicidade do polinómio de grau inferior ou igual a $2n+1$ que verifica (4.16). Além disso, indica-nos um processo que permite a sua determinação.

Teorema 4.17 *Seja $f \in C^{2n+2}([a, b])$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pontos distintos em $[a, b]$. Existe um e um só polinómio H_{2n+1} de grau menor ou igual a $2n + 1$ que verifica (4.16).*

Demonstração: Atendendo às condições impostas, o polinómio terá que ser de grau inferior ou igual a $2n + 1$. Para provar a sua existência vamos considerar as funções

$$h_i(x) = [1 - 2l_i'(x_i)(x - x_i)]l_i(x)^2 \qquad \text{e} \qquad \overline{h}_i(x) = (x - x_i)l_i(x)^2, \qquad i = 0, \ldots, n,$$

com l_i, $i = 0, \ldots, n$, os polinómios de Lagrange (4.3). Como se pode verificar facilmente

$$h_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad h_i'(x_j) = 0, \qquad i, j = 0, \ldots, n,$$

e

$$\overline{h}_i(x_j) = 0, \quad \overline{h}_i'(x_j) = \delta_{i,j}, \qquad i, j = 0, \ldots, n.$$

Assim, o polinómio

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i)h_i(x) + f'(x_i)\overline{h}_i(x)$$

tem grau inferior ou igual a $2n + 1$ e verifica (4.16).

Falta apenas provar a unicidade. Seja Q_{2n+1} outro polinómio de grau inferior ou igual a $2n+1$ que verifica (4.16) e

$$R_{2n+1}(x) = H_{2n+1}(x) - Q_{2n+1}(x).$$

Como $R_{2n+1}(x_i) = R'_{2n+1}(x_i) = 0$, para $i = 0, \ldots, n$, temos que este polinómio de grau inferior ou igual a $2n+1$ tem $2n+2$ zeros o que implica que terá que ser o polinómio nulo. Assim sendo, provámos a unicidade pretendida. $\square$

O único polinómio de grau menor ou igual a $2n+1$ que verifica as condições (4.16) é também chamado polinómio interpolador de Hermite de f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Observação 4.18 *Note-se que, tal como na interpolação de Lagrange, se m for o número de condições impostas para a determinação do polinómio interpolador, o seu grau é $m-1$.*

A obtenção do polinómio interpolador de Hermite pode ser feita de várias maneiras. Vamos apresenta-la neste curso numa forma que generaliza o polinómio interpolador de Newton das diferenças divididas.

Consideremos a mudança de variável $z_0 = x_0$, $z_1 = x_0$, $z_2 = x_1$, $z_3 = x_1$, …, $z_{2n} = x_n$, $z_{2n+1} = x_n$. Uma vez que

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i, \qquad i = 0, \ldots, n,$$

não podemos definir as diferenças divididas

$$f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f[x_i, x_i].$$

No entanto, atendendo a que

$$\lim_{x \to x_i} f[x, x_i] = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i),$$

podemos definir as diferenças divididas generalizadas para pontos não distintos na forma

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i).$$

Pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange generalizado podemos ainda definir

$$f[\underbrace{x_i, x_i, \ldots, x_i}_{r+1 \text{ vezes}}] = \frac{f^{(r)}(x_i)}{r!}. \tag{4.17}$$

Com esta notação, pode verificar-se facilmente que o polinómio interpolador de Hermite de grau $2n+1$ nos pontos da partição (4.1) é dado por

$$\begin{aligned}
H_{2n+1}(x) = \quad & f(z_0) + \sum_{i=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \ldots, z_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - z_j) \\
= \quad & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\
& + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\
& + \cdots + f[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2(x - x_n).
\end{aligned}$$

Exercício 4.4.1 Prove a afirmação anterior para o caso em que se consideram apenas dois pontos de interpolação ($n = 1$).

O polinómio interpolador de Hermite pode assim ser determinado recorrendo à tabela das diferenças divididas generalizadas, tabela essa onde cada ponto aparece repetido duas vezes.

Exercício 4.4.2 Construa um algoritmo para determinar o valor do polinómio interpolador de Hermite num determinado ponto do seu domínio.

Exercício 4.4.3 Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo para a função $f(x) = \sin x$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Resolução: Temos

x_i	$f(x_i)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	0			
		1		
0	0		$\frac{4-2\pi}{\pi^2}$	
		$\frac{2}{\pi}$		$-\frac{16+4\pi}{\pi^3}$
$\frac{\pi}{2}$	1		$-\frac{4}{\pi^2}$	
		0		
$\frac{\pi}{2}$	1			

Logo

$$H_3(x) = x + \frac{4-2\pi}{\pi^2}x^2 - \frac{16+4\pi}{\pi^3}x^2(x-1) = x[1 + x[-0.231 - 0.921(x-1)]].$$

4.4.2 Erro de interpolação

O estudo do erro na interpolação de Hermite consiste na generalização do estudo efectuado para a interpolação de Lagrange de acordo com o seguinte teorema.

Teorema 4.19 *Seja H_{2n+1} o polinómio, de grau menor ou igual a $2n+1$ interpolador de Hermite da função f nos pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$. Se $f \in C^{2n+2}([a,b])$ então para cada $\overline{x} \in [a,b]$ existe $\xi = \xi(\overline{x}) \in (a,b)$ tal que*

$$e(\overline{x}) = f(\overline{x}) - H_{2n+1}(\overline{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w^2(\overline{x}),$$

onde $w(x)$ é a função dada por (4.6).

Demonstração: Se $\overline{x} = x_i$, para algum i o resultado está provado. Se $\overline{x} \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, definamos a função auxiliar

$$F(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) - \frac{w(x)^2}{w(\overline{x})^2}(f(\overline{x}) - H_{2n+1}(\overline{x})).$$

Como $F(x) = 0$ possui $2n+3$ raízes ($n+1$ zeros duplos x_i, $i = 0, \ldots, n$ e uma raiz simples x) temos, por aplicação do Teorema de Rolle generalizado, que $F^{(2n+2)}(x) = 0$ possui, pelo menos, uma raiz em (a,b). Seja ξ essa raiz. Uma vez que

$$F^{(2n+2)}(x) = f^{(2n+2)}(x) - \frac{(2n+2)!}{w(\overline{x})^2}(f(\overline{x}) - H_{2n+1}(\overline{x})),$$

substituindo x por ξ, obtém-se o resultado pretendido. □

4.4.3 Interpolação segmentada cúbica

Consideremos um intervalo $[a, b]$ e uma partição dada por (4.1). Designemos por polinómio segmentado cúbico (ou função cúbica por segmentos) na partição (4.1), uma função contínua em $[a, b]$ que, quando restringida a cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$, da partição, coincide com um polinómio de grau menor ou igual a três.

Seja f uma função conhecida nos pontos da partição (4.1). Como se sabe, existe um e um só polinómio segmentado cúbico S_H tal que

$$\begin{array}{l} S_H(x_i) = f(x_i) \\ S'_H(x_i) = f'(x_i) \end{array}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Nestas condições, S_H é chamado o polinómio interpolador (de Hermite) segmentado cúbico de f nos pontos de (4.1).

Temos que

$$S_H(x) = \begin{cases} S_H^{(1)}(x) & x \in [x_0, x_1] \\ S_H^{(2)}(x) & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ S_H^{(i)}(x) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots & \vdots \\ S_H^{(n)}(x) & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

onde $S_H^{(i)}$ pode ser escrita na forma seguinte

$$\begin{aligned} S_H^{(i)}(x) = \quad & f(x_{i-1}) + f'(x_{i-1})(x - x_{i-1}) + f[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})^2 \\ & + f[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i](x - x_{i-1})^2(x - x_i). \end{aligned}$$

Exercício 4.4.4 Mostre que o erro que se comete ao aproximar $f \in C^4([a, b])$ pelo seu polinómio interpolador segmentado de Hermite cúbico na partição (4.1) é dado por

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_H(x)| \leq \frac{M_4}{384} h^4,$$

onde

$$M_4 = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

e $h = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$.

4.4.4 Polinómios osculadores

Para finalizar esta secção vamos generalizar o raciocínio efectado na obtenção do polinómio interpolador de Hermite para determinar polinómios que osculem os pontos de suporte mais do que duas vezes.

Suponhamos que, dada uma função f suficientemente diferenciável, queremos determinar um polinómio H_N que verifique

$$\left.\begin{array}{ll} f^{(j)}(x_0) = H_N^{(j)}(x_0), & j = 0, 1, \ldots, r_0 \\ f^{(j)}(x_1) = H_N^{(j)}(x_1), & j = 0, 1, \ldots, r_1 \\ \quad\cdots & \\ f^{(j)}(x_n) = H_N^{(j)}(x_n), & j = 0, 1, \ldots, r_n \end{array}\right. . \tag{4.18}$$

Quando tal situação acontece dizemos que f e H_N são funções que r_i-osculam (osculam r_i vezes) o ponto x_i, $i = 0, 1 \ldots, n$. Pode demonstrar-se o seguinte teorema.

Teorema 4.20 *Existe um único polinómio H_N, de grau menor ou igual a N, com*

$$N = n + \sum_{j=0}^{n} r_j,$$

que satisfaz (4.18).

A determinação do polinómio referido no teorema anterior pode ser feita de forma análoga à do polinómio interpolador de Hermite. Não iremos considerar o caso geral mas sim um exemplo elucidativo.

Exemplo 4.21 O polinómio interpolador de uma função f para o suporte $f(0) = -1$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 10$ e $f''(1) = 40$ pode ser determinado com a ajuda de seguinte tabela

x_i	$f(x_i)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	-1				
		-2			
0	-1		3		
		1		6	
1	0		9		5
		10		11	
1	0		20		
		10			
1	0				

Assim

$$H_4 = -1 - 2x + 3x^2 + 6x^2(x-1) + 5x^2(x-1)^2 = -1 + x[-2 + x[3 + (x-1)[6 + 5(x-1)]]].$$

Exercício 4.4.5 Prove que o polinómio de Maclaurin de f de grau n oscula, com f, $n+1$ vezes a origem.

Resolução: De facto, sendo o polinómio de Maclaurin de f dado por

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

temos que

$$\begin{array}{c} f(0) = P_n(0) \\ f'(0) = P_n'(0) \\ \cdots \\ f^{(n)}(0) = P_n^{(n)}(0) \end{array} .$$

4.5 Interpolação bidimensional de Lagrange

Nesta secção vamos considerar a determinação de um polinómio de duas variáveis que seja interpolador de uma função conhecida num conjunto de pontos de IR^2.

Seja $[a, b] \times [c, d]$ um subconjunto de IR^2. No intervalo $[a, b]$ consideremos a partição

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

e, em $[c, d]$

$$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < \cdots < y_{m-1} < y_m = d.$$

As duas partições anteriores induzem em $[a, b] \times [c, d]$ o seguinte conjunto de pontos

$$\{(x_i, y_j), i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, m\}, \tag{4.19}$$

a que chamamos rede rectangular.

Seja f uma função definida em $[a, b] \times [c, d]$ e suponhamos que f é conhecida nos pontos da rede rectangular (4.19). O nosso objectivo é determinar um polinómio de duas variáveis x e y,

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} a_{ij} x^i y^j, \qquad (x, y) \in IR^2,$$

que verifique as condições de interpolação

$$P(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \qquad i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, m. \tag{4.20}$$

O número de condições de interpolação é $(n + 1) \times (m + 1)$ e portanto o polinómio em x e y que permite resolver o problema de interpolação poderá apresentar $(n + 1) \times (m + 1)$ coeficientes.

Teorema 4.22 *Seja f uma função definida no rectângulo $[a, b] \times [c, b]$ onde consideramos a rede rectangular (4.19). Dados $f(x_i, y_j), i = 0, \ldots, n, j = 0, \ldots, m$, o único polinómio P de grau n em x e m em y que verifica (4.20) o* polinómio interpolador de Lagrange bidimensional

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) l_i(x) l_j(y),$$

onde

$$l_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

e

$$l_j(y) = \prod_{k=0, k \neq j}^{n} \frac{y - y_k}{y_j - y_k}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Demonstração: Definamos $l_{ij}(x,y) = l_i(x)l_j(y)$, $i = 0,\dots,n$, $j = 0,\dots,m$,. Estas funções verificam

$$l_{ij}(x_k, y_t) = \delta_{kt} = \begin{cases} 1 & k = t \\ 0 & k \neq t \end{cases}.$$

Assim, concluímos imediatamente que o polinómio P satisfaz as condições de interpolação.

Falta apenas provar que esse polinómio é o único polinómio de grau n em x e m em y que resolve o problema de interpolação. Consideremos

$$Q(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} q_{ij}x^i y^j$$

um poliómio de grau n em x e m em y que verifica as condições de interpolação. Fixemos y_t na partição de $[c,d]$ e consideremos o polinómio em x

$$Q(x,y_t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} q_{ij}x^i y_t^j = \sum_{i=0}^{n} a_{it}x^i$$

em que

$$a_{it} = \sum_{j=0}^{m} q_{ij}y_t^j.$$

Atendendo às condições de interpolação, os coeficientes deste polinómio devem satisfazer a

$$\sum_{i=0}^{n} a_{it}x_k^i = f(x_k, y_t), \qquad k = 0,\dots,n,$$

isto é, o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0t} \\ a_{1t} \\ a_{2t} \\ \vdots \\ a_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0,y_t) \\ f(x_1,y_t) \\ f(x_2,y_t) \\ \vdots \\ f(x_n,y_t) \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que este sistema é possível e determinado, existe para cada t, uma única solução a_{it}, $i = 0,\dots,n$. Finalmente, para os coeficientes q_{ij} e para cada $i = 0,\dots,n$, temos o seguinte sistema

$$\sum_{j=0}^{n} q_{ij}y_t^j = a_{it}, \qquad t = 0,\dots,m,$$

isto é

$$\begin{bmatrix} 1 & y_0 & y_0^2 & y_0^3 & \cdots & y_0^m \\ 1 & y_1 & y_1^2 & y_1^3 & \cdots & y_1^m \\ 1 & y_2 & y_2^2 & y_2^3 & \cdots & y_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_m & y_m^2 & y_m^3 & \cdots & y_m^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{i0} \\ q_{i1} \\ q_{i2} \\ \vdots \\ q_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{bmatrix}$$

que é também um sistema possível e determinado. Provámos deste modo a unicidade do polinómio interpolador. $\square$

Exercício 4.5.1 Considere a função

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi^2}{180}xy\right), \qquad (x,y) \in [0.4, 0.6] \times [0.4, 1],$$

cujo gráfico é dado na figura seguinte.

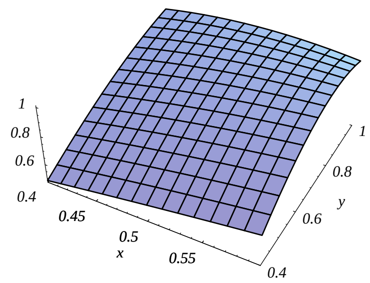

Figura 4.1: Função $f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi^2}{180}xy\right)$, com $(x,y) \in [0.4, 0.6] \times [0.4, 1]$.

A tabela seguinte tem os valores da função anterior nos pontos (x,y) da rede rectangular $\{0.4, 0.5, 0.6\} \times \{0.4, 0.6, 0.8, 1\}$:

x_i \ y_i	0.4	0.6	0.8	1
0.4	0.00877	0.01390	0.01754	0.02193
0.5	0.01096	0.01644	0.02193	0.02741
0.6	0.01315	0.01973	0.02631	0.03289

.

1. Construa o polinómio interpolador de Lagrange de f nos pontos da rede.
2. Determine um valor aproximado para $f(0.5, 0.7)$ e compare o resultado obtido com o valor exacto.

Exercício 4.5.2 Determine o polinómio de Lagrange de grau 1 em x e de grau 2 em y interpolador da função $f(x,y) = x + y^2/2$, com $(x,y) \in [0,1] \times [0,2]$, cujo gráfico é dado na figura seguinte.

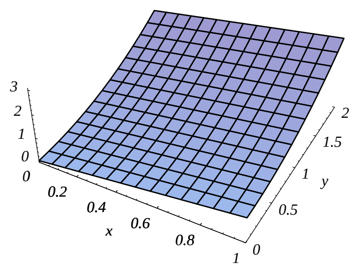

Figura 4.2: Função $f(x,y) = x + y^2/2$, com $(x,y) \in [0,1] \times [0,2]$.

Determine uma estimativa para o erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio anterior.

4.6 Exercícios de aplicação à engenharia

Exercício 4.6.1 Durante a sedimentação da reacção de saponificação entre quantidades equimolares de hidróxido de sódio e acetato de etilo, a concentração c (g mole/litro) de cada reagente varia com o tempo t (min) de acordo com a equação

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} + kt,$$

onde c_0 é a concentração inicial e k (litro/g mole min) é a constante de reacção. Foram obtidos os seguintes resultados em laboratório à temperatura de $77^o\ F$:

$1/c$	24.7	32.4	38.4	45.0	52.3	65.6	87.6	102	154	192
t	1	2	3	4	5	7	10	12	20	25

1. Obtenha uma estimativa para a concentração inicial.
2. Obtenha uma estimativa para a concentração ao fim de 15 minutos e compare-a com a solução obtida em laboratório (ao fim de 15 minutos obteve-se $1/c = 135$).

Exercício 4.6.2 O censo da população dos Estados Unidos, entre 1930 e 1980, produziu os seguintes resultados:

Ano	1930	1940	1950	1960	1970	1980
População ($\times 10^3$)	123203	131669	150697	179323	203212	226505

Use um método de diferenças finitas apropriado para estimar a população nos anos de 1920, 1965, e 2000. Sabendo que a população no ano de 1920 era de 105711$\times 10^3$, o que pode inferir quanto à precisão das aproximações obtidas para os anos de 1965 e 2000?

Exercício 4.6.3 Determine uma aproximação para o instante na da passagem do perigeu da Lua em Março, 1999, a partir dos valores tabelados para as zero horas de cada dia; indique também a distância (em raios médios da Terra) da Terra à Lua nesse instante.

dia	19	20	21
distância	57.071	56.955	57.059

Exercício 4.6.4 Determine uma aproximação para a declinação aparente de Vénus para o dia 8 de Maio de 1999, às 18h30m45s, por interpolação cúbica a partir das Efemérides Astronómicas (onde está tabelada para cada dia, às zero horas)

dia	7	8	9	10
δ_i	$+5^o51'47''.55$	$+6^o22'25''.20$	$+6^o52'54''.57$	$+6^o23'14''.96$

Exercício 4.6.5 Considere a seguinte tabela de valores da gravidade específica do ácido fosfórico como função da percentagem de H_3PO_4.

$H_3PO_4, \%$	Grav. esp.	$H_3PO_4, \%$	Grav. esp.
0	1.0000	35	1.216
1	1.0038	40	1.254
2	1.0092	45	1.293
4	1.0200	50	1.335
6	1.0309	55	1.379
8	1.0420	60	1.426
10	1.0532	65	1.475
12	1.0647	70	1.526
14	1.0764	75	1.579
16	1.0884	80	1.633
18	1.1008	85	1.689
20	1.1134	90	1.746
22	1.1263	92	1.770
24	1.1395	94	1.794
26	1.1529	96	1.819
28	1.1665	98	1.844
30	1.1805	100	1.870

1. Aproxime os dados usando interpolação polinomial. Comente os resultados obtidos.
2. Use a função determinada por interpolação para tabelar a gravidade específica obtida para percentagens de $0, 5, 10, \ldots, 100$ de H_3PO_4.

4.7 Referências bibliográficas

R.L. Burden e J.D. Faires (1988), Numerical Analysis, 4th ed., PWS-Kent, Boston.

B.J. Caraça (1989), Conceitos Fundamentais da Matemática, 9^a ed., Livraria Sá Costa, Lisboa.

S.D. Conte e C. de Boor (1980), Elementary Numerical Analysis, 3th ed., McGraw-Hill, New York.

H. Goldstine (1977), A History of Numerical Analysis from 16^{th} Through the 19^{th} Century, Springer-Verlag, New York.

J.R. Rice (1983), Numerical Methods, Software, and Analysis, McGraw-Hill, Tokyo.

M. Rosa (1992), Tópicos de Análise Numérica, Textos de Apoio, DMUC, Coimbra.

M.R. Valença (1988), Métodos Numéricos, INIC, Braga.