Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Cálculo I (Engenharia Electrotécnica)

Ano de 1998/1999 — Folha 1

Revisões

1. Determine o domínio das seguintes expressões designatórias:

   (a) $\dfrac{3x+1}{4-x}$; (b) $\dfrac{1}{(x+2)(x-5)}$; (c) $\sqrt{(x^2-1)(x-5)}$.

2. Resolva as seguintes inequações em $\mathbb{R}$:

   (a) $\mid x^2-4 \mid \leq 1$; (b) $\dfrac{x-3}{1-x} \geq 0$; (c) $\mid x-1 \mid > x$;

   (d) $x^2-5x+6>0$; (e) $\mid x-1 \mid - \mid 2x+4 \mid > 1$; (f) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-5x} \geq 0$.

3. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

   (a) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$; (b) $\sqrt{x+1}-3=\sqrt{x-2}$; (c) $x^4-5x^2+6=0$.

4. Determine o domínio e a expressão analítica da aplicação $g \circ f$, sendo:

   (a) $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$; (b) $f(x)=\mid x \mid$ e $g(x)=\begin{cases} \log(x+1), & \text{se } x>-1, \\ 0, & \text{se } x=-1, \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x<-1. \end{cases}$

5. Represente graficamente as funções dadas por:

   (a) $f(x)=1+\mid x \mid$; (b) $g(x)=\begin{cases} 1, & \text{se } x \geq -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{se } x<-1; \end{cases}$ (c) $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \wedge x \notin \mathbb{Z}_0^+, \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Z}_0^+. \end{cases}$

6. Esboce os seguintes gráficos, assinalando os zeros e os vértices da parábola:

   (a) $f(x)=x^2+2x+1$; (b) $g(x)=x^2-5x^2+6$; (c) $h(x)=-x^2+7x-12$.

7. Sendo f a função real de variável real definida por $f(x)=kx^2+3x+2k+1$, determine k de modo que $\sqrt{f(x)+2}$ tenha por domínio $\mathbb{R}$.

8. Indique quais das seguintes funções são pares ou ímpares:

   (a) $f(x)=\mid x+1 \mid$; (b) $g(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$; (c) $h(x)=\sqrt{\mid 1-x^2 \mid}$.

9. Diga, justificando quais das seguintes funções são limitadas:

   (a) $f(x)=x, \quad x \in \mathbb{R}$; (b) $g(x)=x, \quad x \in \mathbb{R}^+$;

   (c) $h(x)=x, \quad x \in [0,126]$; (d) $k(x)=\dfrac{2}{\cos x-7}, \quad x \in \mathbb{R}$.

10. Determine o contradomínio de:

    (a) $1+2\cos x$; (b) $\operatorname{sen} x-2$; (c) $1+\operatorname{tg} x$; (d) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

11. Determine o período de:

    (a) $\operatorname{sen}(2x)$; (b) $\operatorname{tg}(3x)$; (c) $\cos^2 x$.

12. Considere as restrições das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ nos intervalos $[-\pi, \pi]$ e $[0, \pi]$.

    (a) Esboce os seus gráficos.
    (b) Indique o domínio, o contradomínio e os intervalos de monotonia das funções consideradas.
    (c) Verifique se as funções são limitadas.
    (d) Indique quais das funções são injectivas.

13. Considere a função $f(x) = 1 - \operatorname{sen}(3x)$.

    (a) Determine o seu domínio e o seu contradomínio.
    (b) Determine a expressão geral dos seus zeros.
    (c) Determine a expressão geral dos seus maximizantes e minimizantes.
    (d) Esboce o gráfico da restrição de f ao intervalo $[-\pi, \pi]$ e determine o período de f.

14. Considere a função $g(x) = 2 - 2\cos(5x)$.

    (a) Determine o contradomínio de g.
    (b) Estude g quanto à paridade.
    (c) Mostre que g tem período $\frac{2\pi}{5}$.

15. Considere a função $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x$.

    (a) Determine o domínio de f.
    (b) Estude f quanto à paridade.
    (c) Calcule $f(\alpha)$ sabendo que $\cos\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\dfrac{12}{13}$ e $\alpha \in 4^{\underline{o}}\, Q$.

16. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações:

    (a) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$; (b) $\operatorname{tg}(2x) = -1$; (c) $\cos x = -\cos(2x)$;

    (d) $\operatorname{sen} x = \cos x$; (e) $\cos(2x) = 0$; (f) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

17. A partir do gráfico da função seno, coseno ou tangente, represente graficamente as seguintes funções:

    (a) $|\operatorname{sen} x|$; (b) $\cos|x|$; (c) $\operatorname{sen}|x|$;

    (d) $|\cos(2x)|$; (e) $3\operatorname{tg} x$; (f) $\cos x - \dfrac{\pi}{5}$;

    (g) $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+\pi}{6}\right)$; (h) $4\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2} - 5\pi\right)$; (i) $2 + \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

18. Seja a um número real diferente de 1. Prove que:

    (a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$;
    (b) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$;
    (c) $\log_a x^p = p\log_a x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall p \in \mathbb{R}$.

19. (a) Resolva o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ \log_{10} x - \log_{10} y = \log_{10} 7 \end{cases}$.

    (b) Determine y sabendo que $\log_2 y = 5\log_2 3 - \dfrac{1}{3}\log_2 5 + 1$.
    (c) Calcule $\log_2 16$ e $\log_{27} 9$.
    (d) Resolva em ordem a x a equação $\log_a(2x) - \log_a(x-2) = \log_a 3$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.
    (e) Calcule a tal que $\log_a 16 = \frac{4}{3}$.
    (f) Simplifique $2^{4 - \log_2 x}$ e $(8 \times 32)^{\log_4 x}$.