Capítulo I: Funções e continuidade

20. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, com a, L, $M \in \mathbb{R}$.
Mostre, usando a definição, que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$.

21. Mostre que $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ é igual a:

    (a) $+\infty$ quando $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$;

    (b) $+\infty$ quando $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 1$;

    (c) 0 quando $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$.

22. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Mostre que escolhendo convenientemente as funçõe $f(x)$ e $g(x)$, definindo $h = f \times g$ podemos ter as seguintes situa¸cões:

    (a) $\lim_{x\to a} h(x) = +\infty$; (b) $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$; (c) $\lim_{x\to a} h(x) = -27$;

    (d) $\lim_{x\to a} h(x) = 27$; (e) $\lim_{x\to a} h(x)$ não existe, sem ser $+\infty$ nem $-\infty$.

23. Use o teorema das funções enquadradas para provar que:

    (a) $\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x} = 0$; (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{x^4 + 4x^2 + 7}} = 0$;

    (c) $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$, sendo $f(x)$ uma função tal que $f(x) \in [0, c]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (c constante positiva).

24. Prove que $\lim_{x\to 0} x^4 \mathrm{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

25. Prove que não existem os seguintes limites:

    (a) $\lim_{x\to a} \cos \dfrac{1}{x-a}$; (b) $\lim_{x\to a} \mathrm{tg}\, \dfrac{1}{x^2 - a^2}$.

26. Estude, quanto à continuidade, as seguintes funções:

    (a) $f(x) = \begin{cases} 2e^x + 1, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x \in [0,2], \\ \mathrm{sen}\, x, & \text{se } x > 2; \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0; \end{cases}$ (c) $f(x) = \ln(|x|)$;

    (d) $f(x) = \mathrm{tg}\,(2x)$; (e) $f(x) = x \cdot \mathrm{sen}\,(\frac{1}{x})$; (f) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} x^k$.

27. Determine a expressão analítica das inversas das funções seguintes, indicando os domínios correspondentes:

    (a) $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$; (b) $f(x) = -3 + 2 \ln \frac{x}{3}$;

    (c) $f(x) = 3^{\mathrm{sen}\,(x+1)} - 2$; (d) $f(x) = 1 - \frac{1}{2} \log_7 [\mathrm{ch}\,(4x - 1)]$.

28. Resolva as seguintes equações:

    (a) $2\text{sen}\, x = -\sqrt{3}$;
    (b) $\cos x = \text{sen}^{\,2} x - \cos^2 x$;
    (c) $\text{arc sen}\,[2x\sqrt{1-x^2}] + \text{arc sen}\,[-2x] = 0$;
    (d) $\text{tg}\,(\text{arc sen}\, x) = \text{tg}\,(\text{arc cos}\, x)$.

29. Determine os domínios de definição das seguintes funções:

    (a) $f(x) = \text{arc sen}\left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)$;
    (b) $f(x) = \text{arg ch}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$;
    (c) $f(x) = \text{arc cos}\left(\dfrac{x-3x^2}{x^2+1}\right)$.

30. Calcule:

    (a) $\text{sen}\,(\text{arc cos}\,\frac{3}{5})$; (b) $\text{sen}\,(\text{arc tg}\, 2)$; (c) $\text{arc cos}\,(\text{sen}\,\frac{5\pi}{4})$;

    (d) $\text{sen}\,(\text{arc sen}\,\frac{12}{13} + \text{arc sen}\,\frac{4}{5})$; (e) $\text{sen}\,(\frac{1}{2}\text{arc cos}\,\frac{4}{5})$; (f) $\cos\,(\text{arc cos}\,\frac{15}{17} - \text{arc cos}\,\frac{7}{25})$.

31. Mostre que:

    (a) $\text{ch}^{\,2} x - \text{sh}^{\,2} x = 1$; (b) $\text{ch}\, x + \text{sh}\, x = e^x$;

    (c) $\text{sh}\,(-x) = -\text{sh}\, x$; (d) $\text{ch}\,(-x) = \text{ch}\, x$;

    (e) $\text{sh}\,(x+y) = \text{sh}\, x\,\text{ch}\, y + \text{ch}\, x\,\text{sh}\, y$; (f) $\text{ch}\,(x+y) = \text{ch}\, x\,\text{ch}\, y + \text{sh}\, x\,\text{sh}\, y$;

    (g) $\text{th}\,(x+y) = \dfrac{\text{th}\, x + \text{th}\, y}{1 + \text{th}\, x\,\text{th}\, y}$; (h) $\text{ch}\,\dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\text{ch}\, x}{2}}$;

    (i) $\text{sh}^{\,2} x = \dfrac{\text{ch}\,(2x) - 1}{2}$; (j) $(\text{ch}\, x + \text{sh}\, x)^n = \text{ch}\,(nx) + \text{sh}\,(nx)$.

32. Mostre que:

    (a) $\text{arg sh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;
    (b) $\text{arg ch}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, se $|x| > 1$;
    (c) $\text{arg th}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, se $|x| < 1$;
    (d) $\text{arg coth}\, x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, se $|x| > 1$.

33. Seja $f(x) = \frac{x-2}{x}$. Verifique que $f(-1)\cdot f(1) < 0$. Poderá concluir que existe $c \in]-1,1[$ para o qual se tenha $f(c) = 0$?

34. Prove que a equação $x^3 - 9x^2 + 7 = 0$ tem três raízes, uma em cada um dos intervalos abertos $]-1,0[$, $]0,1[$ e $]6,9[$. Melhore o resultado aproximando-as até às centésimas.

35. Seja $f(x) = \text{tg}\, x$. Embora $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ e $f(\frac{3\pi}{4}) = -1$, não existe nenhum x no intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ tal que $f(x) = 0$. Será que este facto contraria o Teorema dos Valores Intermédios? Justifique.

36. Seja f uma função contínua em $[0,1]$ e $0 \le f(x) \le 1$, para todos os valores de $x \in [0,1]$. Mostre que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.