DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

CÁLCULO I (ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA)

ANO DE 1998/1999 FOLHA 3

Capítulo II: Derivadas

37. Sendo $f(x) = x^2$ calcule, por definição, a derivada de f no ponto $x_o \in \mathbb{R}$.

38. Determine as expressões analíticas que definem as funções derivadas das funções a seguir indicadas:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2, \\ x+2, & \text{se } x > 2; \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x > 0, \\ -5, & \text{se } x = 0, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{se } -1 < x < 0; \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

39. Determine os valores máximo e mínimo da função f abaixo definida, no intervalo indicado:

(a) $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [0,1]$; (b) $f(x) = |x|$, $x \in [-1,1]$;

(c) $f(x) = \text{sen } x$, $x \in [0,2]$; (d) $f(x) = e^x - x$, $x \in [1,2]$

40. Averigue se as funções a seguir indicadas têm algum extremo relativo para $x = 2$:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 2, \\ 4, & \text{se } x = 2, \\ x+5, & \text{se } x > 2; \end{cases}$

(b)$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 2, \\ 1, & \text{se } x = 2, \\ -x^2+8, & \text{se } x > 2. \end{cases}$

41. Escreva uma equação das rectas tangente e normal ao ramo da parábola $y = \sqrt{x}$ no ponto de abcissa $x = 4$.

42. Para $f(x) = |x|$, mostre que $f(-1) = f(1)$ mas $f'(c) \neq 0$ para todo o c no intervalo $(-1, 1)$. Estará este facto em contradição com o Teorema de Rolle?

43. Use o Teorema de Rolle para provar que se $f(x)$ é um polinómio de grau 3, então f tem no máximo três zeros reais.

44. Utilize o Teorema de Rolle e o Teorema dos Valores Intermédios para provar que:

(a) $f(x) = x^3 + 3x + 2$ tem uma só raiz real;

(b) $f(x) = x^5 - 5x + 1$ tem três raízes reais.

45. Prove que, se $a > 0$, a equação cúbica $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais de uma raíz real, qualquer que seja o valor de b.

46. (a) Determine dois números positivos cujo produto seja máximo e cuja soma seja igual a 40.

(b) Determine as dimensões do rectângulo de área máxima que pode ser inscrito numa circunferência de raio a.

(c) Determine as dimensões do cilindro circular recto de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio a.

(d) Corta-se um pedaço de arame de $1,50$ metros de comprimento em duas partes. Com uma das partes forma-se um círculo, e com a outra, um triângulo equilátero. Determine onde deve ser cortado o arame de modo que a soma das áreas do círculo e do triângulo seja:

i. máxima;

ii. mínima.

47. Um campo petrolífero tem 8 poços que produzem um total de 1600 barris de petróleo por dia. Para cada poço adicional perfurado a produção média por poço decresce de 10 barris diários. Quantos poços adicionais devem ser abertos para maximizar a produção?

48. Uma bateria de voltagem fixa V e resistência interna fixa r está ligada a uma circuito de resistência variável R. Pela lei de Ohm, a corrente I no circuito é dada por $I = V/(R+r)$. Se a for¸ca resultante é dada por $P = I^2R$, mostre que a força máxima ocorre se $R = r$.

49. Um projéctil é lançado verticalmente do solo com uma velocidade inicial de 112 metros por segundo. Após t segundos, a sua distância ao solo é de $112t - 4,9t^2$ metros. Determine:

(a) a velocidade do projéctil para $t = 2$, $t = 3$ e $t = 4$;

(b) o instante em que o projéctil atinge o solo;

(c) a velocidade no momento em que este atinge o solo.

50. Um homem com 2 metros de altura anda a uma velocidade de $0,6$ metros por segundo, em direcção a um candeeiro de iluminação que está a 5 metros acima do solo. Com que velocidade se desloca o extremo da sombra?

51. Uma gota de água esférica sofre evaporação a uma taxa proporcional à sua superfície exterior. Como varia o raio?

52. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x^2-1}$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(3x)}{x^2}$; (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^3-\operatorname{sen} x}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$; (i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$;

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$; (k) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{k}{x})^x$.

53. (a) Usando a Regra de L'Hôpital, prove que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty$, qualquer que seja o número positivo α.

(b) Usando a Regra de L'Hôpital, mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$, qualquer que seja o número natural n .

Conclua que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$, qualquer que seja o número real α.

54. Verificando que não se pode aplicar a Regra de L'Hôpital, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\cos x}{x}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.