Capítulo III: Primitivas

55. Use o Teorema da Derivada da Função Inversa para determinar as expressões analíticas das funções derivadas das seguintes funções:

(a) $\text{arc sen}\, x$; (b) $\text{arc cos}\, x$; (c) $\text{arc tg}\, x$; (d) $\text{arc cotg}\, x$;
(e) $\text{arg sh}\, x$; (f) $\text{arg ch}\, x$; (g) $\text{arg th}\, x$; (h) $\text{arg coth}\, x$.

56. Calcule as primitivas das funções indicadas em seguida:

(a) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$; (b) $f(x) = \frac{x^3+x+2}{\sqrt{x}}$; (c) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+1}$;
(d) $f(x) = \sqrt{x^3} - \frac{1}{2} \cdot x^{-2} + 5$; (e) $f(x) = \text{sen}\ x \cdot \cos x$; (f) $f(x) = \text{sh}^2 x \cdot \text{ch}\ x$;
(g) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$; (h) $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$; (i) $\dfrac{\text{sen}\ x + \cos x}{\cos x}$.

57. Sejam F e G primitivas de f e g, respectivamente. Diga, justificando, se é verdade que:

(a) FG é primitiva de fg?

(b) F/G é primitiva de f/g?

58. Seja F uma primitiva de f. Prove que:

(a) se F é uma função par, então f é uma função ímpar;

(b) se F é uma função ímpar, então f é par.

59. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:

(a) $x^3 + x^2 - 3x + 4$; (b) $\dfrac{2a}{\sqrt{x}} - \dfrac{b}{x^2} - 3k\sqrt[3]{x^2}$; (c) $\text{tg}^2 x \cdot \sec^2 x$; (d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^3}}$;
(e) $\dfrac{-3x}{x^4 + 5^4}$; (f) $\dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}$; (g) $\dfrac{1}{(x-a)^n}$, $n \neq 1$; (h) $\dfrac{1}{1 + \cos x}$;
(i) $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$; (j) $\dfrac{x-1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; (k) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x - x^2}}$; (l) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - (x+b)^2}}$;
(m) $\dfrac{\text{arc sen}\ x}{\sqrt{1 - x^2}}$; (n) $\text{sen}\ 2x \cdot \cos 4x$; (o) $\cos 6x \cdot \cos 5x$; (p) $\text{tg}\ 2x \cdot \cos 2x \cdot \text{sen}\ \frac{3x}{2}$;
(q) $\dfrac{1}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$; (r) $\dfrac{\ln x}{x}$; (s) $\dfrac{e^{\text{tg}\ x}}{\cos^2 x}$; (t) 4^{2-3x};
(u) $x \cdot 7^{x^2}$; (v) $\dfrac{e^{2x}}{4 + e^{2x}}$; (w) $\dfrac{1}{x} \cdot \text{sen}\ (\ln x)$; (x) $\dfrac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$.

60. (*Primitivação por partes*)

Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:

(a) $x \cdot \cos x$; (b) $\arccos x$; (c) $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \text{arc sen}\ x$; (d) $(x^2 - 1)\cos x$;
(e) $(\sec x \cdot \text{cosec}\ x)^2$; (f) $\cos\sqrt{x}$, $x \neq 0$; (g) $(x+1)^{10}(2x+1)$; (h) $\ln x$;
(i) $x \cdot 5^x$; (j) $e^x \cdot \text{sen}\ x$; (k) $e^{3x}(2x+3)$; (l) $\text{arctg}\ (\dfrac{1}{x})$;
(m) $x \cdot \sec^2 x$; (n) $\text{sen}\ (\ln x)$; (o) $\dfrac{\ln^2 x}{x^2}$; (p) $\ln(x + 1 + x^2)$.

Deduza a seguinte fórmula de recorrência:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2n-2}\ \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right) dx\right].$$

61. (*Primitivação de potências de funções trigonométricas*)

Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:

(a) $\cos^3 x$; (b) $\operatorname{sen}^2 x$; (c) $\operatorname{cotg}^3 x$; (d) $\sec^4 x$;

(e) $\operatorname{cosec}^3 x$; (f) $\operatorname{sen}^5 x$; (g) $\operatorname{sen}^3 2x \cdot \cos^3 2x$; (h) $\operatorname{sen}^2 2x \cdot \cos^3 2x$;

(i) $\cos^4 x$; (j) $\operatorname{tg}^3(\frac{x}{3}) + \operatorname{cotg}^2(\frac{x}{3})$; (k) $\frac{1}{\cos^4 3x}$; (l) $\sec^3(\frac{x}{2})$;

(m) $\operatorname{cotg}^3 3x$; (n) $\sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x$; (o) $\operatorname{sen}^5 x \cdot \sqrt[3]{\cos x}$; (p) $\operatorname{cosec}^6 x$.

62. (*Primitivação de fracções racionais*)

Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:

(a) $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$; (b) $\frac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1}{x(x-1)^2}$; (c) $\frac{1}{x^2(x^2+1)}$;

(d) $\frac{1}{(x-1)^2(2x+1)}$; (e) $\frac{x^3 + x - 1}{(x^2+2)^2}$; (f) $\frac{x+3}{x(x^2+1)^2}$;

(g) $\frac{x^4}{x^4 - 1}$; (h) $\frac{x}{2x^2 - 3x - 2}$; (i) $\frac{3x+2}{x^3 + x^2 - 2x}$.

63. Calcule as primitivas da função f, quando:

(a) $f(x) = (x+4)^2$, (b) $f(x) = (x^2+4)^2 x$, (c) $f(x) = \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{\sqrt{x}}$,

(i) pelo método de substituição;

(ii) desenvolvendo a função f.

Compare as constantes de primitivação obtidas usando os dois métodos.

64. (*Primitivação por substituição*)

Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:

(a) $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$; (b) $x^5(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}$; (c) $\frac{3^x}{3^{2x} - 3^x - 2}$;

(d) $\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x + 2\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x}$; (e) $\sqrt{4 - 4x^2}$; (f) $\frac{x^3}{x^8 - 5}$;

(g) $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; (h) $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{3-x}}$; (i) $\frac{1}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$;

(j) $\frac{1}{4\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$; (k) $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$; (l) $\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}^2 3x}$.

65. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:

(a) $\frac{x \cdot e^{\operatorname{arc\,sen} x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$; (b) $\frac{1}{x \ln x}$; (c) $\frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}$; (d) $\frac{1}{\operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$;

(e) $\frac{-3x}{x^4 + e^4}$; (f) $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; (g) $\frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}$; (h) $\operatorname{tg} x$;

(i) $\operatorname{cosec} x$; (j) $\frac{1}{(4+x^2)\operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{2})}$; (k) $\frac{1}{x(1+\ln x)}$; (l) $\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$;

(m) $\frac{1}{\operatorname{sen} x - \cos x}$; (n) $\frac{1}{4\operatorname{sen} 3x + \cos 3x}$; (o) $e^{-2x} \cdot \cos x$; (p) $\operatorname{arctg} x$;

(q) $\frac{\ln(\ln x)}{x}$; (r) $\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}$; (s) $e^{x-1} \cdot 3^x$; (t) $\operatorname{sen} 2x \cdot \cos(\frac{x}{3})$;

(u) $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2}$; (v) $e^{\operatorname{arc\,sen} x}$; (w) $\cos(\ln x)$; (x) $x\sqrt{x-1}$.