66. Determine o valor do integral definido, identificando-o como a área sob o gráfico duma função:

(a) $\int_{-3}^{2}(2x+6)\ dx$; (b) $\int_{-1}^{2}(7-3x)\ dx$;

(c) $\int_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}\ dx$; (d) $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ dx,\ a>0$.

67. Determine o limite das seguintes sucessões:

(a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\,(k\frac{2}{n})\frac{2}{n},\ \ n \geq 1$;

(b) $v_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+n)^2},\ \ n\geq 1$.

68. Seja f uma função integrável no intervalo $[a,b]$. Sejam m e M, respectivamente, um minorante e um majorante da função f no intervalo $[a,b]$. Prove que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

69. Mostre que se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então:

$$-2\pi \leq \int_0^{2\pi} f(x)dx \leq 2\pi.$$

70. Calcule os seguintes integrais definidos:

(a) $\int_0^1 x\cdot \operatorname{sen}^2 x\ dx$; (b) $\int_0^9 g(x)\ dx$, sendo $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0\leq x<1 \\ x^3 & \text{se } 1\leq x<4 \\ \sqrt{x} & \text{se } 4\leq x\leq 9\end{cases}$;

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx$, sendo $f(x) = |x-\frac{\pi}{4}|$; (d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\ dx$, sendo $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x\neq \frac{\pi}{4} \\ 16 & \text{se } x = \frac{\pi}{4}\end{cases}$.

71. Determine uma função f contínua e uma constante λ de modo que, para todo o x real, se tenha: (a) $\int_\lambda^x f(t)dt = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}$; (b) $\int_\lambda^x f(t)dt = \cos 2x + 1$.

72. Determine uma função contínua de modo que:

$$3\int_0^x f(t)dt = xf(x) \quad \text{e} \quad f(1)=2.$$

73. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, calcule as derivadas das funções a seguir definidas:

(a) $\int_1^x \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\ dt,\ x>0$; (b) $\int_2^x \frac{\cos y}{y}\ dy,\ x>0$; (c) $\int_1^{\ln x} \operatorname{sen}\,(y+e^y)\ dy$.

74. Calcule $\lim_{x\to 0}\frac{(\int_0^x e^{t^2}\ dt)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\ dt}$.

75. Mostre que, se f é integrável em $[-a,a]$, então:

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, se f é par;

(b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, se f é ímpar.

Faça a interpretação geométrica destes resultados.

76. Calcule os seguintes integrais definidos efectuando, sempre que possível, as substituições indicadas:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{3} \sqrt[3]{2-x^2}\,dx,\ x=\sqrt{2}\cos t$; (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{4+x^2}dx,\ x=\frac{1}{t}$; (c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx,\ x=2\operatorname{sen} t$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx,\ x=\sec t$; (e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt[5]{x^2}dx,\ x^{2/5}=t$; (f) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\cos x}{6-5\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x}dx,\ \operatorname{sen} x=t$.

77. Sendo $\displaystyle F(x)=\int_{1}^{x} e^{\frac{t^2+1}{t}}\frac{1}{t}\,dt,\ x>0$, mostre que $F(\frac{1}{x})=-F(x)$.

78. Mostre que se f é contínua em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx=0$, então existe pelo menos uma raíz da equação $f(x)=0$ em $[a,b]$.

79. Usando o Teorema do Valor Médio para integrais prove as seguintes desigualdades:

(a) $\displaystyle\frac{1}{10\sqrt{2}} \le \int_{0}^{1} \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \le \frac{1}{10}$; (b) $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx \le \frac{1}{2}-\frac{1}{1+e^4}$.

80. Mostre que é válida a igualdade:

$$\forall x>0,\ \ln x=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}\,dt.$$

Interprete-a geometricamente.

81. Usando a igualdade provada no exercício anterior, verifique que:

(a) $\displaystyle\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x-1\ ,\ \forall x>0$;

(b) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

(c) $\ln(x\,y)=\ln x+\ln y\ ,\ \forall x>0, y>0$.

82. Considere a função $\phi:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x)=\int_{1}^{x}\frac{t}{(1+t^2)^2}\ln t\,dt\,.$$

(a) Calcule $\phi(2)$.

(b) Mostre que ϕ é derivável e calcule $\phi'(x)$, $x>0$.

(c) Estude ϕ sob o ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto $c>0$ tal que $\phi(c)=0$.

83. Considere a função real de variável real definida por:

$$F(y)=\int_{0}^{1} x^2 e^{yx}\,dx,\ \ y\in\mathbb{R}.$$

(a) Será F uma função estritamente monótona?

(b) Utilizando uma mudança de variável adequada, mostre que para todo o y positivo, se tem

$$F(y)=\frac{1}{y^3}\int_{0}^{y} t^2 e^t\,dt.$$

(c) Verifique que $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} F(y)=\frac{1}{3}$.