Capítulo V: Integrais impróprios

84. Indique quais dos seguintes símbolos representam integrais definidos, quais representam integrais impróprios e quais não representam integrais definidos ou impróprios:

(a) $\int_{-2}^{0} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$; (b) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$; (c) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}dx$;

(d) $\int_{-2}^{2} \operatorname{sen} x dx$; (e) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}dx$; (f) $\int_{-2}^{2} \sqrt{x^2-4}dx$;

(g) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-x}dx$; (h) $\int_{-2}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$; (i) $\int_{-3}^{3} |1-x|dx$.

85. Use a definição para determinar a natureza dos seguintes integrais impróprios e indique os seus valores no caso de convergência:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dx$; (b) $\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$; (c) $\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$;

(d) $\int_{4}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$; (e) $\int_{-\infty}^{0} x \cdot 5^{-x^2}\, dx$; (f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+9}\, dx$;

(g) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$; (h) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}\, dx$; (i) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{1}{5}}}\, dx$;

(j) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} e^{-2x} \cdot \cos x\, dx$; (k) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)^2}\, dx$; (l) $\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}\, dx$.

86. Mostre, usando a definição, que o integral impróprio

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

é convergente e de valor $\frac{1}{\alpha-1}$, se $\alpha > 1$, e divergente se $\alpha \leq 1$.

87. Mostre, usando a definição, que o integral impróprio

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, dx$$

é convergente e de valor $\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, se $\alpha < 1$, e divergente se $\alpha \geq 1$.

88. Mostre que o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

é convergente. Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e interprete o integral impróprio como o valor de uma área.

89. (a) Mostre que os seguintes integrais impróprios são divergentes:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$; (ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3}{x}\, dx$; (iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$.

(b) Calcule:

(i)v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$; (ii)v.p. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3}{x}\, dx$; (iii)v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$.

90. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios, efectuando as mudanças de variável indicadas:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx, \quad x = \operatorname{tg} t$;

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\, dx, \quad x = t^2$;

(c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx, \quad x = \ln t$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\, dx, \quad x = \frac{3}{2}\operatorname{sen} t$.

91. Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios (usando os critérios de comparação):

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+6x+12}\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^3+x^2+1}\, dx$; (c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen} x\, dx$;

(d) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x+1)}{x}\, dx$; (e) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}\, dx$; (f) $\displaystyle\int_{0}^{100} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}\, dx$;

(g) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{1}{x\ln^{1/5} x}\, dx$; (h) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx$; (i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}\, dx$.

92. Determine a natureza do integral impróprio

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{x^n}{x^3+x+1}\, dx$$

em função dos valores de n.

93. (a) Mostre, utilizando um critério de comparação, que o integral impróprio

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^4+1}}\, dt$$

é divergente.

(b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}\int_{0}^{x^2} \frac{t}{\sqrt{t^4+1}}\, dt.$$

94. Determine o valor que λ deve tomar para que o integral impróprio

$$\int_{2}^{+\infty} \left(\frac{\lambda x}{2x^2-1} - \frac{1}{6x-1}\right) dx$$

seja convergente.

95. Determine a natureza do integral impróprio, efectuando a mudança de variável indicada:

$$\int_{0}^{1} \cos\frac{1}{x}\, dx, \quad x = \frac{1}{t}.$$