Capítulo VI: Aplicações do cálculo integral

96. Calcule as áreas das figuras limitadas por:
    (a) a parábola $y = \frac{x^2}{2}$ e as rectas $x = 1$, $x = 3$ e $y = 0$;
    (b) a parábola $x = 2 - y - y^2$ e o eixo das ordenadas;
    (c) a parábola $x^2 - y = 4$ e o eixo dos xx;
    (d) a parábola $y^2 = -x + 2y$ e o eixo dos yy;
    (e) as curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e as rectas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$;
    (f) a curva $y = \operatorname{sh} x$ e as rectas $x = 6$, $y = -2$;
    (g) a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

97. Estabeleça o integral que permite calcular a área da figura limitada por $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e $x = 0$ e que é exterior a $y^2 = 3x$.

98. Calcule a área da figura limitada pela parábola $y = -x^2 + 4x - 3$ e as suas rectas tangentes nos pontos (0,-3) e (3,0).

99. Calcule o comprimento das curvas:
    (a) $y = \operatorname{arc\,sen}\,(e^{-x})$ desde o ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ até ao ponto de abcissa 1;
    (b) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ desde $(1, 1)$ até $(2, 2\sqrt{2})$.

100. Determine o comprimento das seguintes curvas:
    (a) $y = x, x \in [a, b]$;
    (b) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, x \in [0, b]$;
    (c) $y = x^2, x \in [0, 1]$.

101. Determine o comprimento da curva de equação $y = \sqrt{1 - x^2}$, entre os pontos de abcissa $x = 0$ e $x = a$ (com $a \in [0, 1]$).

    Interprete geometricamente o resultado obtido.

102. Estabeleça um integral definido que permita calcular o comprimento da parte da elipse

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

contida no 2º octante.

103. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas de equações $y = x^2$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$
    (a) em torno do eixo dos xx;
    (b) em torno do eixo dos yy.

104. Considere a região $\mathcal{R}$ limitada pelas curvas $y^2 = 8x$ e $x = 2$. Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região $\mathcal{R}$

    (a) em torno do eixo dos xx;
    (b) em torno do eixo dos yy;
    (c) em torno da recta $x = 2$.

105. Considere o sólido obtido pela rotação em torno do eixo dos xx da região limitada pelas curvas de equação $y = 3 - x$, $x = 0$, $x = 2$ e pelo eixo dos xx.

    (a) Estabeleça os integrais que lhe dão o volume deste sólido pelos processos das cascas cilíndricas e das fatias.
    (b) Calcule o volume do sólido.

106. Rode em torno do eixo dos yy a região limitada pelas curvas de equação $y = x^3$, $y = 0$, $y = 8$ e o eixo dos yy.

    (a) Estabeleça os integrais que lhe dão o volume deste sólido pelos processos das cascas cilíndricas e das fatias.
    (b) Calcule o volume do sólido.

107. Calcule o volume do sólido

    (a) gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ para $x \in [0, \pi]$ e $y = 0$
        i. em torno da recta $y = -2$,
        ii. em torno da recta $x = -2$;
    (b) gerado pelo círculo limitado pela circunferência de equação $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ (com $a > r$) ao girar em torno do eixo dos yy (o sólido obtido chama-se *toro*);
    (c) gerado pelo triângulo de vértices $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, quando gira em torno do eixo dos yy;
    (d) do segmento esférico de duas bases cortado da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ mediante os planos $x = 2$ e $x = 3$ (sugestão: intersecte com o plano $X0Y$ e faça girar uma figura conveniente);
    (e) que resulta quando a região limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 9$ gira em torno da recta $x = 9$;
    (f) obtido ao rodar a região limitada pela parábola $y = ax^2$ e pela recta $y = h$ em torno da recta $y = h$, com $a > 0$ e $h > 0$ (o sólido obtido é chamado *limão de Cavalieri*);
    (g) gerado pela região limitada por $y = x^3$, $y = 1$ e $x = 0$, quando roda em torno da recta $y = 1$.

108. Atribua, se possível, um valor à área da região R e um valor ao volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo dos xx, sendo:

    (a) $R = \{(x, y) : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$;
    (b) $R = \{(x, y) : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\}$;
    (c) $R = \{(x, y) : x \geq 4,\ 0 \leq y \leq x^{-\frac{3}{2}}\}$;
    (d) $R = \{(x, y) : x \geq 8,\ 0 \leq y \leq x^{-\frac{2}{3}}\}$;
    (e) $R = \{(x, y) : 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\}$;
    (f) $R = \{(x, y) : 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\}$;
    (g) $R = \{(x, y) : -4 < x \leq 4,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x + 4}\}$;
    (h) $R = \{(x, y) : 1 < x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x - 1}\}$.