Capítulo VII: Coordenadas polares e coordenadas paramétricas

109. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos com as seguintes coordenadas polares: (a) $(-2, 4\frac{\pi}{3})$; (b) $(2, -\frac{\pi}{2})$; (c) $(0, -\pi)$; (d) $(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$; (e) $(3, \pi)$.

110. Determine as coordenadas polares dos pontos definidos em coordenadas cartesianas por $(-\sqrt{3}, -1)$ e $(1, -1)$ de três formas com: (a) $\rho \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$; (b) $\rho \geq 0$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$; (c) $\rho \leq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

111. Exprimindo-a em coordenadas cartesianas, identifique a curva:

(a) $\rho = 3$; (b) $\theta = \frac{\pi}{3}$; (c) $\rho^2 \cdot \text{ sen } (2\theta) = 1$; (d) $\rho = \dfrac{6}{2 - \cos\theta}$.

112. Esboce a região determinada em coordenadas polares pelas seguintes desigualdades:

(a) $1 \leq \rho \leq 2, \cos\theta \leq 0$; (b) $-1 \leq \rho \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

113. Exprima em coordenadas polares as seguintes equações:

(a) $x^2 + y^2 = kx$; (b) $x = -3$; (c) $y = 3x$; (d) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

114. Indique as simetrias principais das seguintes curvas:

(a) $\rho = 3$; (b) $\rho = -4 \text{ sen } \theta$; (c) $\rho^2 = 4\cos\theta$; (d) $\rho = e^\theta$; (e) $\theta = \frac{\pi}{4}$; (f) $\rho^2 = -4\cos\theta$.

115. Esboce as curvas de equação:

(a) $\rho = a(1 - \cos\theta)$; (b) $\rho = 3(1 - \text{ sen } \theta)$; (c) $\rho = \cos(2\theta)$; (d) $\rho = \text{ sen } (3\theta)$;
(e) $\rho = 4\theta,\ \theta \leq 0$; (f) $\rho = -4 \text{ sen } \theta$; (g) $\rho = \text{tg}\theta,\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$; (h) $\rho = \ln\theta,\ \theta > 1$;
(i) $\rho = e^\theta,\ \theta \geq 0$; (j) $\rho = \theta,\ \theta \geq 0$.

116. Calcule a área limitada:

(a) pelo cardióide a partir da sua equação em coordenadas polares $\rho = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$;
(b) pela lemniscata de equação $\rho^2 = \text{ sen } (2\theta)$;
(c) pela curva de equação $\rho^2 = -2 \text{ sen } (2\theta)$;
(d) pelas curvas de equações $\rho^2 = 4 \text{ sen } \theta$ e $\rho^2 = 3 \text{ sen } \theta$.

117. Estabeleça os integrais que nos permitem calcular a área da figura:

(a) interior ao cardióide $\rho = 4(1 - \cos\theta)$ e exterior à circunferência $\rho = 6$;
(b) interior às circunferências $\rho = 3\sqrt{2}\cos\theta$ e $\rho = 3\text{sen } \theta$;
(c) uma das pétalas da rosa de quatro pétalas de equação $\rho = 6\text{sen } (2\theta)$.

118. Diga qual o erro do seguinte raciocínio: "A área da lemniscata $\rho^2 = a^2 \cdot \cos(2\theta)$ é dada por

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2\cos(2\theta) \, d\theta = \left[\frac{1}{4}a^2\text{sen } (2\theta)\right]_0^{2\pi} = 0."$$

119. (a) Mostre que as equações

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \text{ sen } t \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = r \text{ sen } u \\ y = r\cos u \end{cases}, u \in [0, 2\pi]$$

são equações paramétricas da circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = r^2$.

(b) Mostre que $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r \text{ sen } t \end{array}\right.$, $t \in [0, \pi]$ são equações paramétricas de uma semi-circunferência de centro na origem e raio r.

120. (a) Mostre que as equações $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b \text{ sen } t \end{array}\right.$, $t \in [0, 2\pi]$ são equações paramétricas da elipse de equação cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(b) Identifique a curva que se obtém quando se considera: i. $t \in [0, \pi]$; ii. $t \in [0, 4\pi]$.

(c) Defina outras equações paramétricas da elipse de equação cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

121. Elimine o parâmetro nas equações que se seguem e esboçe a curva que elas representam:

(a) $\left\{\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 5 \text{ sen } t \end{array}\right.$, $t \in [0, 2\pi]$; (b) $\left\{\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 5 \text{ sen } t \end{array}\right.$, $t \in [0, \pi]$; (c) $\left\{\begin{array}{l} x = \sec t \\ y = \text{tg } t \end{array}\right.$, $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}[$;

(d) $\left\{\begin{array}{l} x = \sec t \\ y = \text{tg } t \end{array}\right.$, $t \in [0, \pi]\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$; (e) $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = 2\ln t \end{array}\right.$, $t \geq 1$; (f) $\left\{\begin{array}{l} x = t - 2 \\ y = 2t + 3 \end{array}\right.$, $t \in [0, 5]$.

122. Determine a equação da tangente a cada uma das seguintes curvas no ponto correspondente ao valor do parâmetro indicado; (a) $\left\{\begin{array}{l} x = 2t + 4 \\ y = 8t^2 - 2t + 4 \end{array}\right.$, $t = 1$; (b) $\left\{\begin{array}{l} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{array}\right.$, $t = 2$.

123. Utilize as equações paramétricas para determinar a equação da tangente à curva nos pontos indicados: (a) $\rho = 2\cos\theta$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; (b) $\rho = \frac{1}{\theta}$, $\theta = 2\pi$; (c) $\rho = 4 - 3 \text{ sen } \theta$, $\theta = \pi$.

124. Calcule o perímetro da circunferência cujas equações paramétricas são $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r \text{ sen } t \end{array}\right.$, $t \in [0, 2\pi]$.

125. Calcule o comprimento:

(a) da espiral logarítmica $\rho = e^\theta$ desde $\theta = 0$ até $\theta = \pi$;

(b) do cardióide $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $a < 0$;

(c) da espiral logarítmica $\rho = 2e^{2\theta}$, $\theta \geq 0$, que se encontra dentro do círculo $\rho \leq a$ com $a \geq 2$;

(d) do segmento de recta $\rho = 3\sec(\theta - \dfrac{\pi}{3})$ para $\theta \in [-\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}, -\pi + \frac{2\pi}{3}]$.

126. Considere o ciclóide cujas equações paramétricas são $\left\{\begin{array}{l} x = a(t - \text{sen } t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right.$.

(a) Determine o comprimento da curva para $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Esboce as regiões limitadas pelo arco de ciclóide correspondente a $t \in [0, 2\pi]$, a circunferência de centro em $(\pi a, a)$ e raio a e o segmento de recta contido no eixo dos xx correspondente a $x \in [0, 2\pi a]$. Mostre que cada uma das regiões tem área igual a πa^2.

127. Determine a área limitada pelo cardióide de equações paramétricas $\left\{\begin{array}{l} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \text{ sen } t - \text{ sen } 2t) \end{array}\right.$, $a > 0$.

128. Considere a curva de equações paramétricas $\left\{\begin{array}{l} x = \cos 3t \\ y = \text{ sen } t \end{array}\right.$, $t \in [0, 2\pi]$. Determine os pontos onde a tangente à curva é horizontal e onde é vertical. Esboce a curva.

129. Considere a curva de equações paramétricas $\left\{\begin{array}{l} x = t^3 - t \\ y = t^2. \end{array}\right.$.

(a) Represente os pontos correspondentes a $t = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ e 2.

(b) Usando esses pontos e estudando o comportamento das funções $f(t) = t^2$ e $g(t) = t^3 - t$, esboce a curva.

(c) Determine o declive das tangentes à curva nos pontos correspondentes a $t = 1$ e $t = -1$.

(d) Elimine o parâmetro t de modo a obter uma equação em x e y.