Departamento de Engenharia Civil da FCTUC

Exame de Análise Matemática

9 de Dezembro de 2000 | Duração: 2h00m

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. **Responda apenas a uma alínea de cada questão**.

1. (a) Considere a equação das oscilações forçadas

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad p, q > 0,$$

com $f(x) = x$. Determine a solução geral da equação em função dos parâmetros p e q. Discuta o comportamento da solução obtida.

(b) Prove a ortogonalidade do sistema trigonométrico

$$\{1, \sin x, \cos x, ..., \sin kx, \cos kx, ...\}.$$

2. (a) Mostre que $u(x,t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$ é solução da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (c constante) e determine ϕ e ψ de modo a que $u(x,t)$ satisfaça $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \sin(2x)$, e $u_t(x,0) = \sin(3x)$.

(b) Determine, usando transformadas de Fourier, a solução da equação $u_t = u_{xx}$, em $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$, com a condição inicial

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} X_0 & |x| < 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

Nota: Suponha que $\lim_{|x|\to+\infty} u(x,t) = 0$ e considere

$$\mathcal{F}[\exp(-ax^2)] = \sqrt{\pi/a}\,\exp(-\omega^2/(4a)).$$

3. (a) Determine a solução da equação $u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in (0,\pi)$, $t > 0$, que verifica as condições $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ e $u(x,0) = x$.

(b) Resolva a equação de Laplace no rectângulo $[0,\pi] \times [0,1]$ com as condições de fronteira $u(x,1) = x$, $u(x,0) = 0$ e $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$.

4. Considere o problema de Dirichlet para a equação de Laplace num domínio bidimensional. Prove que se o problema tem solução (e conhecendo os princípios do máximo e do mínimo):

(a) ela é única;

(b) ela é estável.