DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL DA FCTUC

EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA

13 DE SETEMBRO DE 2000 — DURAÇÃO: 2H00M

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados. **Responda apenas a uma alínea de cada questão**.

1. (a) Suponha que, no intervalo $[-\pi, \pi]$, f é dada pela seguinte série trigonométrica uniformemente convergente:
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,.$$
Determine os valores de a_0, a_k e b_k, para $k = 1, 2, \ldots$.

   (b) Sendo $\mathcal{F}[f]$ a transformada de Fourier de f, prove que $\mathcal{F}[f'] = i\omega\mathcal{F}[f]$ e que, se pudermos trocar a ordem de inetgração, então, para qualquer c e d arbitrários,
$$\int_c^d f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\frac{e^{i\omega d} - e^{i\omega c}}{i\omega}d\omega, \qquad \text{onde} \quad \hat{f} \equiv \mathcal{F}[f].$$

2. (a) Mostre que $u(x,t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct)$ é solução da equação $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (c constante) e determine ϕ e ψ de modo a que $u(x,t)$ satisfaça $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \sin(2x)$, e $u_t(x,0) = \sin(3x)$.

   (b) Determine, usando transformadas de Fourier, a solução da equação $u_t = u_{xx}$, em $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$, com a condição inicial
$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} X_0 & |x| < 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$
Nota: Considere $\lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x,t) = 0$ e $\mathcal{F}[\exp(-ax^2)] = \sqrt{\pi/a}\exp(-\omega^2/(4a))$.

3. (a) Determine a solução da equação $u_t = a^2 u_{xx}$, $x \in (0,\pi)$, $t > 0$, que verifica as condições $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ e $u(x,0) = x$.

   (b) Resolva a equação de Laplace no rectângulo $[0,\pi] \times [0,1]$ com as condições de fronteira $u(x,1) = \sin(2x)$, $u(x,0) = 0$ e $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$.

4. Considere o problema de Dirichlet para a equação de Laplace num domínio bidimensional.

   (a) Enuncie o "princípio do máximo" para o referido problema;

   (b) Prove o problema é bem posto no sentido de Hadamard, partindo do princípio que o problema tem solução.