DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL DA FCTUC

EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA

7 DE JANEIRO DE 2000 — DURAÇÃO: 3H00M

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Num circuito eléctrico com voltagem aplicada $E(t)$ e inductância L, a carga no condensador q vem dada pela seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

onde R é a resistência e C a capacitância.

   (a) Determine a solução geral da equação homogénea ($E \equiv 0$) em função dos parâmetros. Discuta o comportamento físico das soluções obtidas.

   (b) Determine o estado estacionário da corrente $i = dq/dt$ num circuito modelizado pela equação dada na alínea anterior, com $L = 1$ henry, $R = 2$ ohm, $C = 0.25$ farad e $E(t) = 50\cos t$ volt.

2. (a) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π, contínua, com primeira e segunda derivadas contínuas. Mostre que a sua série de Fourier converge, em cada $x \in \mathbb{R}$, para o valor de $f(x)$.

   (b) Determine a série de Fourier de $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[, \\ 1, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ 0, & x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ (função de período 2π) e indique o valor da soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

3. Suponha que a temperatura numa barra de comprimento π, espessura desprezável e não isolada lateralmente é dada pela equação

$$cu_{xx} - hu = u_t, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0,$$

com $c > 0$ a difusividade térmica e h uma constante.

   (a) Determine, usando o método da separação de variáveis, a temperatura $u(x,t)$, considerando $u(x,0) = f(x)$ e os extremos da barra, $x = 0$ e $x = \pi$, isolados.

   (b) Particularize a solução obtida na alínea anterior para o caso de f ser a função dada em 2.(b).

v.s.f.f.

4. (a) Sendo $\mathcal{F}[f]$ a transformada de Fourier de f prove que:

   i. se
   $$g(x) = \int_0^x f(t)dt + c,$$
   então
   $$\mathcal{F}[g] = \frac{1}{i\omega}\mathcal{F}[f], \quad \omega \neq 0;$$

   ii. se pudermos trocar a ordem de integração, então, para qualquer c e d arbitrários,
   $$\int_c^d f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\frac{e^{i\omega d} - e^{i\omega c}}{i\omega}d\omega,$$
   onde $\hat{f} \equiv \mathcal{F}[f]$.

   (b) Considere o problema da corda vibrante infinita $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$, sujeita às condições iniciais $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$. Mostre, recorrendo às transformadas de Fourier, que, mediante certas condições, a sua solução é
   $$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

5. Considere o problema de Dirichlet para a equação de Laplace num domínio bidimensional $\mathcal{D}$.

   (a) Supondo conhecidos os princípios do máximo e do mínimos, prove que se o problema tem solução, então ela é única e o problema é bem posto no sentido de Hadamard.

   (b) Determine a solução $u(x,y)$ do problema supondo apenas um dos seguinte casos:

   i. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, y \geq 0\}$, $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, $u(x,0) = \sin(2x)$ e $u(x,y)$ é limitada quando $y \longrightarrow \infty$;

   ii. $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq \pi\}$, $u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0$, $u(x,0) = 0$ e $u(x,\pi) = \sin(2x)$.