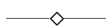


### Exame de Matemática Computacional

14 de Julho de 2008



**Nota:** A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Seja  $\alpha$  a solução de  $x^6 = x^4 + x^3 + 1$  mais próxima de 1.
  - (a) Separe  $\alpha$  num intervalo de amplitude não superior a 1, justificando o procedimento.
  - (b) Aproxime  $\alpha$  pelo método de Newton-Raphson, efectuando duas iterações.
2. Efectuando duas iterações do método iterativo de Newton para sistemas não lineares, obtenha uma aproximação para a solução do sistema

$$F(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ x + y - 2xy = 0 \end{cases}$$

a partir de  $[x_0, y_0]^T = [2, 1]^T$ .

3. Considere a função  $f(x) = e^x$ , para  $x \in [0, 1]$ .
  - (a) Qual o menor número de pontos, igualmente distanciados, que deve tomar em  $[0, 1]$  se pretender aproximar  $f(x)$  por um polinómio interpolador, nesses pontos, por forma que o erro máximo da interpolação seja inferior a  $10^{-2}$ ?
  - (b) Determine o polinómio interpolador de Hermite de grau 3 para a função dada no intervalo  $[0, 1]$ .
4. Seja  $I = \int_a^b f(x)dx$ .

(a) Mostre que

$$I = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi), \quad \xi \in ]a, b[.$$

(b) Considerando  $a = 0$ ,  $b = \frac{\pi}{2}$  e  $f(x) = x \sin x$ , calcule aproximadamente o valor do integral  $I$ , usando a fórmula de Simpson, por forma a que a aproximação obtida tenha 3 casas decimais correctas.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 9 \\ -2x + 10y - 0.5z = 4.5 \\ x - 0.5y + 2z = 3.5 \end{cases}.$$

- (a) Prove que o método iterativo de Gauss-Seidel, aplicado a este sistema, é convergente, qualquer que seja a aproximação inicial considerada.
- (b) Calcule duas iterações do referido método, partindo da aproximação inicial

$$[x_0, y_0, z_0]^T = [1.5, 0.5, 2.0]^T.$$

Indique uma estimativa para o erro da aproximação obtida.

6. Considere o problema de condições iniciais

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{y^3 + y}{(3y^2 + 1)t}, & t \in ]1, 2], \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Sabendo que solução exacta é dada implicitamente por

$$y^3 t + yt = 2,$$

aproxime  $y(2)$  usando:

- o método da bissecção em duas iterações, indicando uma estimativa para o erro na segunda iteração;
- o método de Runge-Kutta de ordem 2, com  $h = 0.5$ .

## FORMULÁRIO

**Método de Newton** ( $f(x) = 0$ )

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Método de Newton para sistemas** ( $F(x) = 0$ )

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J_F^{-1}(x^{(k)})F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Interpolador de Lagrange**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n.$$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n).$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|}{4(n+1)} h^{n+1}.$$

**Interpolador de Hermite**

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n [f(x_i)h_{1i}(x) + f'(x_i)h_{2i}(x)].$$

$$h_{1i}(x) = [1 - 2\ell'_i(x_i)(x - x_i)]\ell_i(x)^2 \quad \text{e} \quad h_{2i}(x) = (x - x_i)\ell_i(x)^2, \quad i = 0, \dots, n.$$

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} ((x - x_0) \cdots (x - x_n))^2.$$

**Fórmula de Simpson**

$$I_S(f) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad n \text{ par.}$$

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180} (b - a) f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in ]a, b[.$$

**Método de Gauss-Seidel** ( $Ax = b$ )

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U x^{(k)} + (D - L)^{-1} b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Método de Runge-Kutta de ordem 2**

$$k_1 = f(t_i, u_i); \quad k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1);$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$